

亚像元光谱图重建算法

杨怀栋, 陈科新, 何庆声, 金国藩

清华大学精密测试技术与仪器国家重点实验室, 北京 100084

摘要 获取高分辨光谱图需要克服探测器空间分辨率低的问题。一个有效解决方案是融合多幅相互间在像面内有亚像元位移的低分辨率光谱图为一幅高分辨光谱图。为此提出了平均带限递推亚像元算法。根据亚像元递推公式的双向性, 分别沿首-末和末-首两个方向各自递推出一组亚像元值, 并将它们的平均值作为最终亚像元值。基于高斯单、双峰的数值实验表明, 该方法可有效提高重建亚像元光谱图的精度。

关键词 光谱; 亚像元; 分辨率

中图分类号: TH744.1 文献标识码: A DOI: 10.3964/j.issn.1000-0593(2009)12-3169-04

引言

现代光谱仪器主要采用光电探测器, 因为它们具有灵敏度高、动态范围大、线性性好、时间分辨率高等优势。但光电探测器也有一个明显的缺点: 空间分辨率低。这表现在两个方面: 一是像元较大, 通常在 $10 \sim 20 \mu\text{m}$ 左右, 约比感光胶粒大 $5 \sim 10$ 倍, 这样它在空间对光谱像积分所产生的模糊就大; 二是抽样率低, 它的抽样间隔取决于像元间隔, 可以说, 也比感光板的抽样间隔大 $5 \sim 10$ 倍。克服探测器空间分辨率低问题的直接方法是减小像元尺寸。受必需的信噪比、工艺等制约, 像元减小余地很有限, 如在 $0.35 \mu\text{m}$ CMOS 工艺下, 探测器像元的极限尺寸约为 $5 \mu\text{m}^{[1]}$, 而且越接近极限尺寸, 代价也越难以承受。替代直接减小像元尺寸的一种行之有效的方法是亚像元技术, 它利用同一光谱分布的多幅低分辨率光谱图, 融合重建出高分辨率的光谱图^[2-4]。对于相互间在像面内有固定亚像元微位移的序列低分辨率光谱图的融合, 常用方法是依据各光谱图像元所对应的空间坐标, 将它们直接重新排列为一幅新的光谱图^[2, 3]。这相当于像元大小不变, 像元间距倍减。从已有工作可知^[5], 像元大小比其间距对光谱图分辨率的影响更大。因此, 求取亚像元值就成为方法探索方向。在该方面, Claudio 等^[4]针对像元大小和其间距近似相等的情况, 提出了递推求取亚像元值的方法, 但其单向递推及低通滤波器纹波等会导致谱线轮廓失真、峰值偏移。本文为此提出了平均带限递推算算法, 并通过数值实验验证了它的效果。

1 平均带限递推亚像元算法

基本的亚像元算法如图 1(a) 所示, 设探测器像元大小为 a , 抽样间隔为 d , 各次探测间引入固定的微位移 $x_{\varepsilon} = d/K$, 其中 K 为细分系数, 是大于 1 的自然数。这样, 最多只能得到 K 个不同的探测序列。若待测光谱像为 $f_g(x)$, 第 k 次探测的输出为 $S_k(n_K)$, $n_k = 0, \dots, N-1$, 则

$$S_k(n_K) = \int_{nd+Kx_{\varepsilon}}^{(n+1)d+Kx_{\varepsilon}} f_g(x) dx \quad k = 0, 1, \dots, K-1 \quad (1)$$

直接将各序列元素按它们对应的抽样位置排列, 则有

$$S(n) = \{S_0(0), S_1(0), \dots, S_{K-1}(0), S_0(1), S_1(1), \dots, S_{K-1}(1), \dots, S_0(N-1), S_1(N-1), \dots, S_{K-1}(N-1)\} \quad (2)$$

这样, $S(n)$, $n = 0, \dots, KN-1$ 与任意一次探测相比, 抽样率均提高了 K 倍, 以它为离散观测数据重建谱线像, 就能获得超过任一次探测的分辨率。基本算法简单易用, 可以成倍提高抽样率, 却不能减小像元积分的影响。上文已说明, 像元空间积分的影响比抽样率的影响要大的多, 特别是在 a 与 d 接近时, 而这正是大多数探测的情况, 如大中型光谱仪主要采用的无缝扫描探测和微小型光谱仪中主要采用阵列探测器。易知, 无缝扫描和阵列探测器的共同特点是 $a \approx d$ 。仔细的分析就会发现, 这种情况下, 是可以减小像元积分的影响。如图 1(b) 示意, 不妨设 $a = d$, 细分系数为 K , 则

$$S_k(n_K) = \int_{nd+Kx_{\varepsilon}}^{(n+1)d+Kx_{\varepsilon}} f_g(x) dx \quad k = 0, 1, \dots, K-1 \quad (3)$$

收稿日期: 2008-08-10, 修订日期: 2008-11-12

基金项目: 国家自然科学基金项目(60578002), 教育部科学技术研究重点项目(106014) 以及北京普析通用仪器有限责任公司光栅与测试技术联合实验室基金项目资助

作者简介: 杨怀栋, 1976 年生, 清华大学精密仪器与机械学系助理研究员 e-mail: yanghd@tsinghua.edu.cn

©1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

与此同时,若用一个像元大小和抽样间隔均为 d/K 的探测器探测,则输出 $s(m)$ 为

$$s(m) = \int_{md/K}^{(m+1)d/K} f_g(x) dx \quad m = 0, 1, \dots, K-1 \quad (4)$$

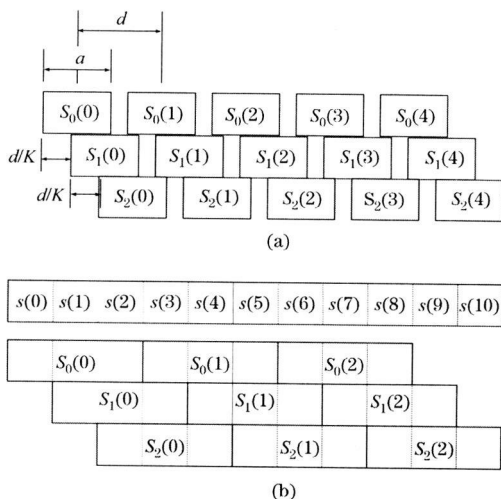


Fig 1 Schematic illustration of sub-pixel algorithm

易知 $S_k(n_k)$ 与 $s(m)$ 间有如下关系

$$S_k(n_k) = \sum_{m=n_K K+k}^{(n_K+1)K+k-1} s(m) \quad (5)$$

按基本算法,将各次探测所得不同 $S_k(n_k)$ 重新排列,可得新序列 $S(n)$ 如(2)式,结合(5)式可得

$$S(n) = \sum_{m=n}^{n+K-1} s(m) \quad (6)$$

由(6)式可得下列递推关系

$$S(n+1) - S(n) = s(n+K) - s(n) \quad (7)$$

进一步可得

$$s(n+K) = S(n+1) - S(n) + s(n) \quad (8)$$

这样,如果 K 个初值 $s(0), s(1), \dots, s(K-1)$ 已知,就可以求出所有 $s(n)$ 。若认为 $S(n)$ 对应原始像元输出(称为像元值),那么 $s(n)$ 将对应它细分 K 份后的输出(称为亚像元值),这样就获得了亚像元信息。

由求亚像元值的递推过程知, K 个亚像元初值是关键。准确的亚像元初值实际上得不到,只能得到测量或估计值。下面分析亚像元初值误差对各亚像元值的影响。设仅有初值误差,令 $\hat{s}(0), \hat{s}(1), \dots, \hat{s}(K-1)$ 为初值估计,则可求出亚像元估计值 $\hat{s}(n)$

$$\hat{s}(n) = S(n-K+1) - S(n-K) + \hat{s}(n-K) \quad (9)$$

那么,各亚像元值的估计误差 $\varepsilon(n)$ 为

$$\begin{aligned} \varepsilon(n) &= \hat{s}(n) - s(n) = [S(n-K+1) - \\ &S(n-K) + \hat{s}(n-K)] - [S(n-K+1) - S(n-K) + s(n-K)] \\ &= \hat{s}(n-K) - s(n-K) = \varepsilon(n-K) \end{aligned} \quad (10)$$

显然,各亚像元值的估计误差是一个周期序列,它的每个周期都由 K 个初值误差组成,其值为, $\varepsilon(0) = s(0) - \hat{s}(0)$, $\varepsilon(1) = s(1) - \hat{s}(1)$, \dots , $\varepsilon(K-1) = s(K-1) - \hat{s}(K-1)$ 。此时,将亚像元估计值改写为

$$\hat{s}(n) = s(n) + \varepsilon(n) \quad (11)$$

则亚像元估计值序列可以看作是亚像元真值序列与一个周期为 K 的误差序列的叠加。这个结论很重要,它揭示出亚像元估计值序列由两个周期特性截然不同的序列组成,那么就有可能在频率域分开。如果对 $\hat{s}(n)$ 进行离散傅里叶变换(DFT),并令 $\hat{s}'(n), \hat{s}_s(n), \hat{\varepsilon}(n)$ 分别为 $\hat{s}(n), s(n), \varepsilon(n)$ 的离散傅里叶变换,则有

$$\hat{s}'(n) = \hat{s}_s(n) + \hat{\varepsilon}(n) \quad (12)$$

与 $\varepsilon(n)$ 相比 $s(n)$ 变化缓慢,因此 $\hat{s}'(n)$ 将占据 $\hat{s}'(n)$ 的低频部分。 $\varepsilon(n)$ 是以 K 为周期的序列,因此 $\hat{\varepsilon}(n)$ 将是周期性的频谱线。由DFT的特点知^[6],若一个以 K 点为周期的序列共有 M 点,则它的DFT将由对应频率 $F, 2F, 3F, \dots$ 的分立频谱线组成,其中 $F = f_s/K$ 为基频, f_s 是序列的抽样频率。因此, $\hat{\varepsilon}(n)$ 将对应 $\hat{s}'(n)$ 中位于 $n = M/K, 2M/K, \dots$ 处的分立频谱线。这样,如果 $\hat{s}'(n)$ 的取值主要在 $n < M/K$ 的范围内,就可以采用截止频率为 $f_c = F$ (即 $n_c = M/K$) 的低通滤波器 $H_L(n)$ 将对应初值误差的频率成份滤除,即有

$$\hat{s}'_L(n) = (\hat{s}'(n) + \hat{\varepsilon}_s(n)) H_L(n) \quad (13)$$

此时, $\hat{s}'_L(n)$ 中不再含有初值误差频谱,对它进行反傅里叶变换就可得到亚像元值序列 $\hat{s}'_L(n)$ 。当亚像元真值序列 $s(n)$ 的截止频率在 F 以下,且不含其他噪声时,可以准确恢复它,有

$$\hat{s}_L(n) = s(n) \quad (14)$$

当亚像元真值序列 $s(n)$ 的截止频率大于 F , 或含其他噪声时,则可以得到 $s(n)$ 的近似值

$$\hat{s}_L(n) \approx s(n) \quad (15)$$

显然,滤波器通带和阻带特性会影响重建效果。通常的数字滤波器在通带和阻带都不可避免地有纹波^[6],它会导致亚像元值序列也产生纹波。解决该问题,可以采用分别沿两个方向递推,将它们结果平均的方法。即利用关系

$$\begin{aligned} s_1(n+K) &= S(n+1) - S(n) + s(n) \\ s_2(n) &= S(n) - S(n+1) + s(n+K) \\ s &= (s_1 + s_2)/2 \end{aligned} \quad (16)$$

虽然这要求额外的初值 $s(N \cdot K + 1), s(N \cdot K + 2), \dots, s((N+1) \cdot K - 1)$, 但增加信息,有助于提高算法的抗干扰能力。

至此解决了递推亚像元分析算法中关键的初值误差问题,建立了平均带限递推亚像元算法,利用它可以求出亚像元值,获得更好的超分辨复原效果。

2 递推亚像元分析算法的分辨率

利用递推亚像元分析算法,可以获得实际像元细分后的亚像元值,从而提高了系统分辨率。但无止境的细分是否意味着能无限的提高分辨力呢? 这里将从截止频率的角度讨论递推亚像元算法以提高分辨力的潜力。

首先讨论理想情况,即不存在任何误差。根据递推亚像元分析算法的原理,它的效果相当于采用了像元大小和抽样间隔都缩小 K 倍的探测器,根据文献可写出它等效系统的传递函数为

$$H_s(x) = H_o(u) \text{sinc}((a/K)u) H_r(u) H_d(u) + \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} H\left(u - \frac{k}{d/K}\right) \text{sinc}\left((a/K)\left(u - \frac{k}{d/K}\right)\right) \quad (17)$$

$$H_r(u) H_d(u) = H_{s0,K}(u) + H_{s-K}(u)$$

如果仅考虑探测系统对分辨率的贡献, 可以看出对应像元积分的 sinc 因子第一个零点扩展了 K 倍, 而且假响应的中心也外移了 K 倍, 所以它不仅增大了基带响应, 也抑制了假响应。就 sinc 因子第一个零点来说, 可以认为截止频率提高了 K 倍, 也就是分辨率提高了 K 倍。这与基本亚像元分析算法成鲜明对比, 后者仅假响应中心外移 K 倍, 而 sinc 因子零点没有变化, 如果从这一点讲, 分辨率是没有实质性变化的。

理论上递推亚像元算法可以无限提高探测系统分辨率, 但实际中总是要受限制的。就平均带限递推亚像元算法本身而言, 潜力就有限。根据算法原理, 为消除初值误差的影响, 必须对亚像元估计值序列进行低通滤波, 其截止频率为 $F = f_s/K$, 其中 f_s 为亚像元估计值序列的抽样频率, 若设探测系统实际抽样频率为 f_s , 则有

$$f_s = f_s K \quad (18)$$

此时有

$$F = f_s \quad (19)$$

也就是说, 递推带限亚像元分析能够利用到的信号频率上限就等于探测系统实际的抽样频率, 即它的理论分辨率为探测系统的实际抽样率。将信号频谱在 F 处截短时, 相当于认为它的截止频率 $f_c = F = f_s$, 此时对应的奈奎斯特率(即信号频谱不发生混叠的最小抽样率)应为 $f_e = 2f_c = 2f_s$ 。对照式(18)知, 这个条件只需细分系数 $K = 2$, 即求出半像元值就可以了。

显然, 大于 2 的细分系数, 不再带来更高的截止频率, 从这一点上说, 就没有必要采用。当然, 信号实际的截止频率可能大于 F , 如果仅令细分系数 $K = 2$, 那么在截短后低频中就不可避免的混入了高频成份, 这就必须增大细分系数, 提高等效抽样率, 以尽量减小混叠。此外, 大的细分系数对应着小的等效像元, 也会减小像元积分模糊。尽管大于 2 的细分系数 K 能改善 F 以下的信号频谱, 从而提高实际获得的分辨率, 但在现有的算法中, 它们不能越过 F , 因此不再从根本上改变分辨率。

3 平均带限递推亚像元分析算法仿真

为验证算法的有效性, 进行了基于 MATLAB 平台的仿真。高斯分布较为典型^[7], 研究中通常以它为对象, 因此合成光谱图由 3 个高斯峰组成, 其中 2 个较为接近, 用以说明算法对双峰分辨率的增强, 另一个较远的则用来说明算法对单峰的影响。设像元大小 a 和像元间隔 d 均为 1, 并根据上节算法与谱线截止频率关系的分析, 令双峰的半高宽均为 1.4, 单峰半高宽较窄为 1.28, 这样它们都大于实际探测系统的抽样间隔。令细分系数为 4, 即每次移动 1/4 抽样间隔, 则可以得到 4 个光谱探测序列, 为体现更一般的情况, 分别给它们叠加了高斯白噪声, 其信噪比为 10。图 2 所示 $f(x)$ 为合成的

光谱图, $S_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$ 为相互间有 1/4 抽样间隔位移的观测光谱图。可以看到探测系统相对较大的像元和抽样间隔导致了它们的轮廓失真, 且除 $S_1(x)$ 外, 其余都已分辨不出双峰中的小峰。噪声则加剧了失真。

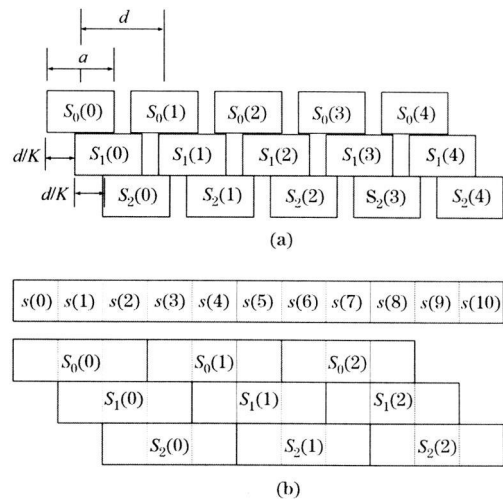


Fig 2 Synthetic spectrogram and its 1/4 pixel shifted observations

图 3 是由 (7) 式获得的递推亚像摘序列的频谱(图中已标出)和利用切比雪夫一致逼近法设计的低通滤波器(图中已

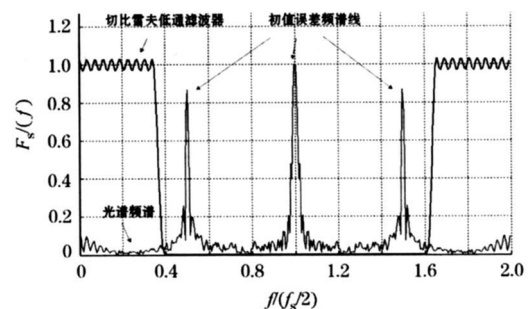


Fig. 3 Fourier spectrum of sub-pixel sequence and corresponding Chebyshev filter

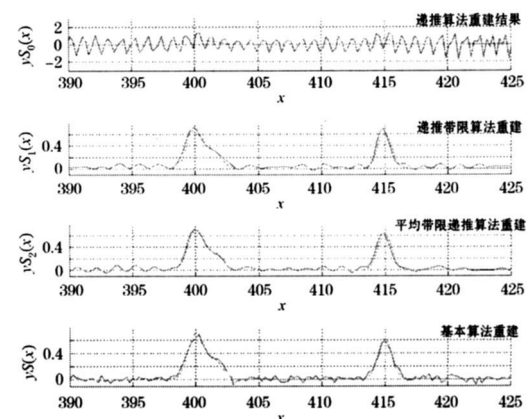


Fig. 4 Comparison of restored sub-pixel spectrograms with different algorithms

标出)。图中将亚像元抽样频率的一半 ($f_s/2$) 归一化为 1, 则 $F = f_s/4 = 0.5$ 。如前面分析的那样, 光谱信号占据着低频, 初值误差则是以 F 为周期的分立频谱线, 而噪声则导致分立的频谱线展宽并混入低频部分。由本例情况, 可利用截止频率 f_c 为 0.4 的低通滤波器将所需亚像元序列的频谱取出。根据切比雪夫一致逼近法设计的低通滤波器能够很好的实现这一目的, 它的幅频响应在通带约为 1, 阻带约为零, 但都有细小的纹波。

图 4 是各种亚像元重建算法的比较, 各图中虚线是合成光谱图真值, 实线是亚像元重建光谱图。 $y_{s_0}(x)$ 是直接采用递推算法重建结果。 $y_{s_1}(x)$ 是带限递推算法重建结果。 $y_{s_2}(x)$ 是采用平均带限递推算法重建结果。 $y_s(x)$ 是基本亚

像元算法重建结果。直接采用递推算法的重建结果不断振荡, 根本无法分辨任一合成谱线。这与前述初值误差影响的分析是吻合的。基本亚像元算法重建结果已能清晰分辨双峰, 但重建谱线轮廓畸变较大, 受噪声影响严重。带限递推算法相比基本算法重建的谱线轮廓质量提高很大, 很接近理论谱线, 但峰位置有偏移。而平均带限递推算法则基本与理论谱线吻合。

仿真结果表明对亚像元算法的分析是正确的, 所提出的平均带限递推亚像元算法能很好的解决基本递推算法所面临的初值问题, 并且有较强的抗干扰能力, 能有效重建高分辨光谱图。

参 考 文 献

- [1] Eid E S. Proceedings of the Eighteenth National Radio Science Conference, **2001**, **1**(27-29): 15.
- [2] Wuttig A, Riesenberger R, Nitzsche G. Pro. SPIE, **2002**, **4563**: 334.
- [3] Wen Desheng, Liu Xinping, Qiao Wei, et al. Proc. SPIE, **2001**, **4480**: 116.
- [4] Pernechele Claudio, Poletto L, et al. Opt. Eng., **1996**, **35**(5): 1503.
- [5] YANG Huai-dong, XU Li, CHEN Ke-xin, et al(杨怀栋, 徐立, 陈科新, 等). Spectroscopy and Spectral Analysis(光谱学与光谱分析), **2005**, **25**(9): 1520.
- [6] Sanjit K Mitra. Digital Signal Processing: A Computer Based Approach, McGraw-Hill Companies, **2004**. 110.
- [7] Peter A Jansson. Deconvolution of Images and Spectra. San Diego, London, Boston, New York: Sydney, Tokyo, Toronto: Academic Press, **2000**. 15.

Algorithm for Restoring Spectrogram with Sub-Pixel Resolution

YANG Huai-dong, CHEN Ke-xin, HE Qing-sheng, JIN Guo-fan

State Key Laboratory of Precision Measurement Technology and Instruments, Tsinghua University, Beijing **100084**, China

Abstract Insufficient spatial resolution of detectors is an obstacle to capturing spectra with high resolution. An effective solution is sub-pixel restoration, which can restore a high resolution spectrogram from sub-pixel shifted low resolution ones. In the present paper, an algorithm for sub-pixel restoration is suggested. It utilizes the bidirectional recursive relation between sub-pixel values and estimates each sub-pixel value from both directions of head-end and end-head. As a result, the averaged value will be accepted as the sub-pixel value. Numerical experiments on single gauss profile and superposition ones verified the effectiveness of the algorithm.

Keywords Spectra; Sub-pixel; Resolution

(Received Aug. 10, 2008; accepted Nov. 12, 2008)