

# 场频率变化时多光子 J-C 模型中原子的动力学特性

江 洵

(南平师范高等专科学校电子工程系 福建省武夷山市 354300)

**摘 要** 利用多光子 J-C 模型, 在旋波近似下, 研究了场频率随时间变化时二能级原子通过多光子跃迁与单模辐射场相互作用系统中原子的动力学特性, 分析了光场频率随时间以正弦函数形式作小量变化的典型情况, 利用数值计算方法给出原子算符  $S_3(t)$  平均值随时间的演化曲线。研究结果表明: 原子算符  $S_3(t)$  平均值随时间的演化受场频率随时间正弦函数形式变化的调制, 场频率振荡的幅值  $u$  越大调制作用越强。

**关键词** 二能级原子, J-C 模型, 频率变化场, 动力学特性。

中图分类号: O431.2 文献标识码: A 文章编号: 1004-8138(2006)05-1001-05

## 1 引言

Jaynes-Cummings (以下简称 J-C) 模型<sup>[1]</sup> 是描述原子与光场相互作用的理想模型, 在探讨光与物质相互作用等问题中, J-C 模型在实验和理论方面均受到广泛的关注。至今, 人们已利用 J-C 模型对光场与原子相互作用系统的量子特性作出了大量的研究。如原子布居的崩塌和回复效应<sup>[2]</sup>, 原子算符的偶极压缩<sup>[3-6]</sup>, 光场的压缩特性和反聚束效应<sup>[7]</sup> 等。随着研究的发展, 人们对 J-C 模型进行了推广, 如三能级原子与光场的相互作用, Kerr 介质中的 J-C 模型等<sup>[8,9]</sup>。然而在以往关于光场与原子相互作用系统的研究中, 一般认为场的频率不随时间变化。事实上, 场频率变化将影响原子与场的相互作用, 也将影响原子和场相互作用系统的量子特性。但至今涉及场频率随时间变化时原子与场的相互作用的研究少见报道。因此, 本文在标准多光子 J-C 模型的基础上, 在旋波近似下, 对标准 J-C 模型进行推广, 考虑相互作用光场频率随时间以正弦函数形式作小量变化的情形, 用数值计算的方法研究了场频率随时间变化时二能级原子通过多光子跃迁与单模辐射场相互作用系统中原子的动力学性质, 给出了原子算符  $S_3(t)$  平均值随时间的演化曲线, 研究表明: 原子算符  $S_3(t)$  平均值随时间的演化受场频率随时间正弦函数形式变化的调制。

## 2 系统态矢的演化

二能级原子通过多光子跃迁与单模辐射场相互作用系统的哈密顿能量, 在旋波近似下为:

$$H = \omega a^\dagger a + \omega S_3 + g (S_+ a^k + a^\dagger S_-) \quad (1)$$

式中取  $\hbar = 1$ ,  $\omega$  是二能级原子的跃迁频率,  $\omega$  是辐射场的频率, 设  $\omega = \omega_0 + f(t)$ ,  $k\omega_0 = \omega$ ,  $\omega_0$  是共振情况下场的频率,  $k$  是跃迁过程中吸收或发射的光子数,  $g$  是原子与辐射场的耦合系数,  $f(t)$  为频率随时间变化的函数, 设  $g = g_0(1 + f(t)/\omega_0)$ ,  $g_0$  为共振情况的耦合系数。  $S_3$ ,  $S_+$  和  $S_-$  为原子的赝自旋算符。二能级原子的基态用  $|0\rangle$ , 激发态用  $|1\rangle$  表示, 则相应的原子算符可用 Pauli 矩阵表示:

联系人, 电话: (0599) 5136156; (0599) 5136799; E-mail: wxyjy@163.com

作者简介: 江洵(1956—), 男, 福建省建阳市人, 武夷学院(筹)电子工程系讲师, 从事量子光学研究。

收稿日期: 2006-06-02; 接受日期: 2006-06-21

$$S_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, S_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, S_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

把系统的哈密顿量分解为:

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_1 \\ H_0 &= \omega(a^+ a + k S_3) \\ H_1 &= (\omega - k\omega) S_3 + g(S_+ a^k + a^+ k S_-) \end{aligned} \quad (3)$$

通过运算可得出:  $[H_0, H_1] = 0$

系统的时间演化算符可分解为:

$$\begin{aligned} U(t) &= \exp(-iHt) = \exp(-iH_0 t) \cdot \exp(-iH_1 t), \\ &= \begin{pmatrix} \exp\left[-i\omega\left(a^+ a + \frac{k}{2}\right)\right] \left(\cos A t - i \frac{\Delta \sin A t}{A}\right), & -ig \exp\left[-i\omega\left(a^+ a + \frac{k}{2}\right)\right] a^k \frac{\sin B t}{B} \\ -ig \exp\left[-i\omega\left(a^+ a - \frac{k}{2}\right)\right] a^+ k \frac{\sin A t}{A}, & \exp\left[-i\omega\left(a^+ a - \frac{k}{2}\right)\right] \left(\cos B t + i \frac{\Delta \sin B t}{B}\right) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{式中 } \Delta = \omega - k\omega - kf(t) \quad A = \left[\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2 a^k a^{+k}\right]^{1/2} \quad B = \left[\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2 a^+ k a^k\right]^{1/2}$$

设初始时刻 ( $t=0$ ), 原子处于基态和激发态的相干迭加态, 则为  $\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \exp(-i\varphi) \end{pmatrix}$ , 而辐射场

处于相干态  $|\alpha\rangle$ , 则系统的初态为:

$$|\varphi(0)\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} |\alpha\rangle \\ \sin \frac{\theta}{2} \exp(-i\varphi) |\alpha\rangle \end{pmatrix} \quad (5)$$

那么系统任意时刻  $t$  的状态可由时间演化算符  $U(t)$  求出:

$$\begin{aligned} |\varphi(t)\rangle &= U(t) |\varphi(0)\rangle = \begin{pmatrix} |\varphi_1\rangle \\ |\varphi_2\rangle \end{pmatrix} \\ |\varphi_1\rangle &= \sum_{n=0} \cos \frac{\theta}{2} \exp\left[-\frac{|\alpha|^2}{2}\right] \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left[-i\left(n + \frac{k}{2}\right)\omega t\right] \left(\cos \Omega^+ t - i \frac{\Delta \sin \Omega^+ t}{\Omega^+}\right) |n\rangle \\ &- i \sum_{n=0} g \sin \frac{\theta}{2} \exp(-i\varphi) \exp\left[-\frac{|\alpha|^2}{2}\right] \frac{\alpha^{n+k}}{\sqrt{(n+k)!}} \exp\left[-i\left(n + \frac{3k}{2}\right)\omega t\right] \left[\frac{(n+k)!}{n!}\right]^{1/2} \frac{\sin \Omega^+ t}{\Omega^+} |n\rangle \\ |\varphi_2\rangle &= \sum_{n=0} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left\{-i\left[\left(n - \frac{k}{2}\right)\omega t + \varphi\right]\right\} \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \Omega^- t + i \frac{\Delta \sin \Omega^- t}{\Omega^-}\right) |n\rangle \\ &- i \sum_{n=0} g \cos \frac{\theta}{2} \exp\left[-i\left(n - \frac{k}{2}\right)\omega t\right] \left[\frac{(n+k)!}{n!}\right]^{1/2} \frac{\sin \Omega^- t}{\Omega^-} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n+k\rangle, \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} \Omega^+ &= \left[\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2 \frac{(n+k)!}{n!}\right]^{1/2}, \\ \Omega^- &= \left[\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2 \frac{n!}{(n-k)!}\right]^{1/2} \end{aligned} \quad (6)$$

### 3 原子的动力学性质

为了研究原子系统的动力学行为, 我们来计算原子算符  $S_3$  期望值随时间的演化,

$$S_3(t) = S_3 = \varphi |S_3| \varphi$$

$$= \frac{1}{2} (\langle \mathcal{Q} | \mathcal{Q} \rangle - \langle \mathcal{Q} | \mathcal{Q} \rangle) \tag{7}$$

令  $\alpha = |\alpha| \exp(i\beta)$ , 由(6)式可求出:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} | \mathcal{Q} \rangle &= (\cos \frac{\theta}{2})^2 \exp(-|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} [(\cos \Omega^+ t)^2 + (\frac{\Delta \sin \Omega^+ t}{2})^2] \\ &+ g^2 (\sin \frac{\theta}{2})^2 \exp(-|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n+2k}}{n!} (\frac{\sin \Omega^+ t}{\Omega^+})^2 \\ &+ g \sin \theta \exp(-|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n+k} \sin \Omega^+ t}{n! \Omega^+} [-\sin(\mathcal{Q} k \omega t - k\beta) \cos \Omega^+ t + \frac{\Delta \cos(\mathcal{Q} k \omega t - k\beta) \sin \Omega^+ t}{2}] \\ \langle \mathcal{Q} | \mathcal{Q} \rangle &= \exp(-|\alpha|^2) (\sin \frac{\theta}{2})^2 \sum_{n=k}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} [(\cos \Omega t)^2 + (\frac{\Delta \sin \Omega t}{2})^2] \\ &+ g^2 (\cos \frac{\theta}{2})^2 \exp(-|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} (\frac{\sin \Omega^+ t}{\Omega^+})^2 \\ &+ g \sin \theta \exp(-|\alpha|^2) \sum_{n=k}^{\infty} [\sin(\mathcal{Q} k \omega t - k\beta) \cos \Omega t - \frac{\Delta \cos(\mathcal{Q} k \omega t - k\beta) \sin \Omega t}{\Omega}] \frac{\sin \Omega t}{\Omega} \frac{|\alpha|^{2n-k}}{(n-k)!} \end{aligned} \tag{8}$$

把(8)式代入(7)式, 就可给出原子系统的动力学行为演化的一般规律。

为简单起见, 设原子初始时刻处于激发态, 即  $\sin \frac{\theta}{2} = 0$ , 光场取  $|\alpha| = \sqrt{n_0}$ ,  $n_0$  为光场平均光子数, 设  $f(t) = u \sin(\omega t)$ ,  $u$  为场频率变化的幅值,  $\omega$  为变化的角频率, 则有:

$$\Delta = -k u \sin(\omega t), g = g_0(1 + u \sin(\omega t)/\omega_1)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Q} | \mathcal{Q} \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left[ (\cos \Omega^+ t)^2 + (\frac{\Delta \sin \Omega^+ t}{2})^2 \right] \cdot e^{-|\alpha|^2} \\ \mathcal{Q} | \mathcal{Q} \rangle &= g^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} (\frac{\sin \Omega^+ t}{\Omega^+})^2 \frac{(n+k)!}{n!} \cdot e^{-|\alpha|^2}, \end{aligned} \tag{9}$$

由(7)和(9), 通过数值计算, 取  $k = 3, \omega = 1.0g_0, \omega_1 = 2000g_0$ , 光场平均光子数  $n_0 = 30, u$  分别取  $0g_0, 2Q_0g_0, 3Q_0g_0, 4Q_0g_0$  时, 原子算符  $S_3(t)$  平均值随时间的演化曲线见图 1 所示。  $k = 3, \omega_1 = 2000g_0$ , 光场平均光子数  $n_0 = 15, u$  分别取  $0g_0, 2Q_0g_0, 3Q_0g_0, 4Q_0g_0, \omega$  取  $2.0g_0$  时,  $S_3(t)$  随  $g_0 t$  的演化曲线见图 2 所示。  $u = 0$  表示场频率为常数且等于原子本征跃迁频率的情况, 这时原子的行为呈现出周期性崩塌和恢复效应。从图 1 和图 2 可见: (1) 原子算符  $S_3(t)$  平均值随时间的演化呈现谐振衰变行为, 特别值得注意的是, 原子的周期崩塌中止一段时间后, 会再度恢复振荡行为, 回复周期比振荡衰变周期长得多。(2) 原子算符  $S_3(t)$  平均值随时间的演化受场频率变化的影响。当光场平均光子数  $n_0$  一定时, 随场频率变化的幅值  $u$  的增大, 演化曲线的中心受场频率正弦函数形式变化的调制, 曲线中心呈现出正弦函数变化的轮廓, 说明场频率变化对原子的动力学行为具有调制作用。但出现崩塌时间和恢复周期不受场频率变化的影响。演化曲线的中心表现出明显的周期性, 其周期为  $t = \pi/\omega$ 。场频率变化的角频率  $\omega$  增大一倍, 演化曲线的中心周期性变化的频率也增大一倍。(3) 从图 1 和图 2 比较相同  $u$  值不同  $n_0$  的曲线可见:  $n_0$  越大, 演化曲线的中心出现周期性振荡的  $u$  值要越大。这是因为  $n_0$  越大, 光场越强, 场与原子的关联越强, 而  $u$  越大失谐量越大, 场与原子关联越弱。

概括以上特点, 并且与场频率为常数时原子算符  $S_3(t)$  平均值随时间的演化曲线比较, 不难发现: 原子与频率随时间变化场相互作用多光子 J-C 模型中, 原子算符  $S_3(t)$  平均值随时间的演化受场频率随时间正弦函数形式变化的调制, 场频率振荡的幅值  $u$  越大调制作用越强, 在场频率振荡的幅值  $u$  大于一定值后, 演化曲线的中心表现出明显的周期性变化规律, 场频率变化的角频率  $\omega$  增

大一倍, 其周期性变化的频率也增大一倍。

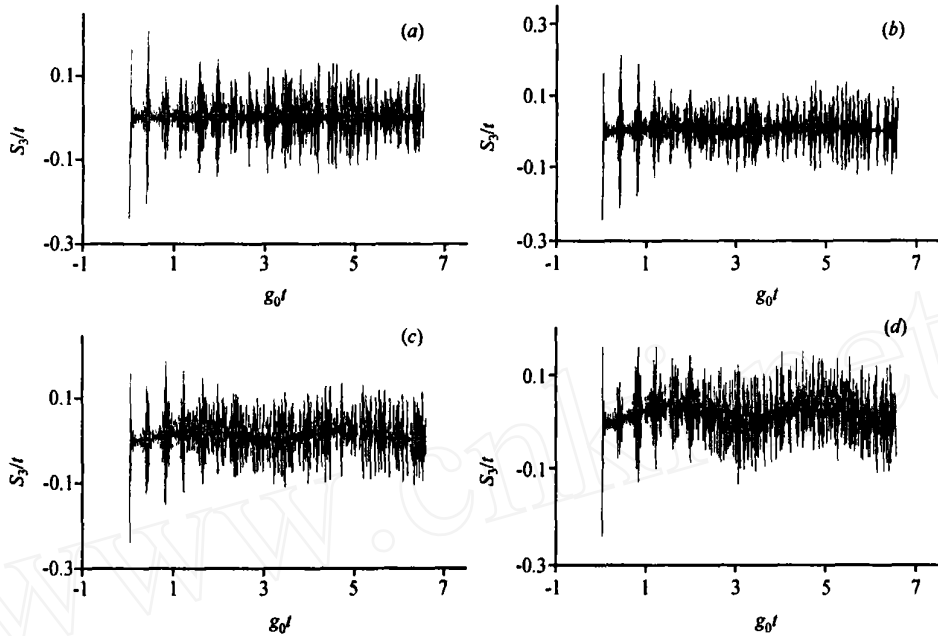


图 1  $n_0 = 30$ ,  $u$  分别取  $0g_0, 20g_0, 30g_0, 40g_0$  时  $S_3(t)$  随时间  $g_0t$  的演化  
(a) ——  $u = 0$ ; (b) ——  $u = 20g_0$ ; (c) ——  $u = 30g_0$ ; (d) ——  $u = 40g_0$

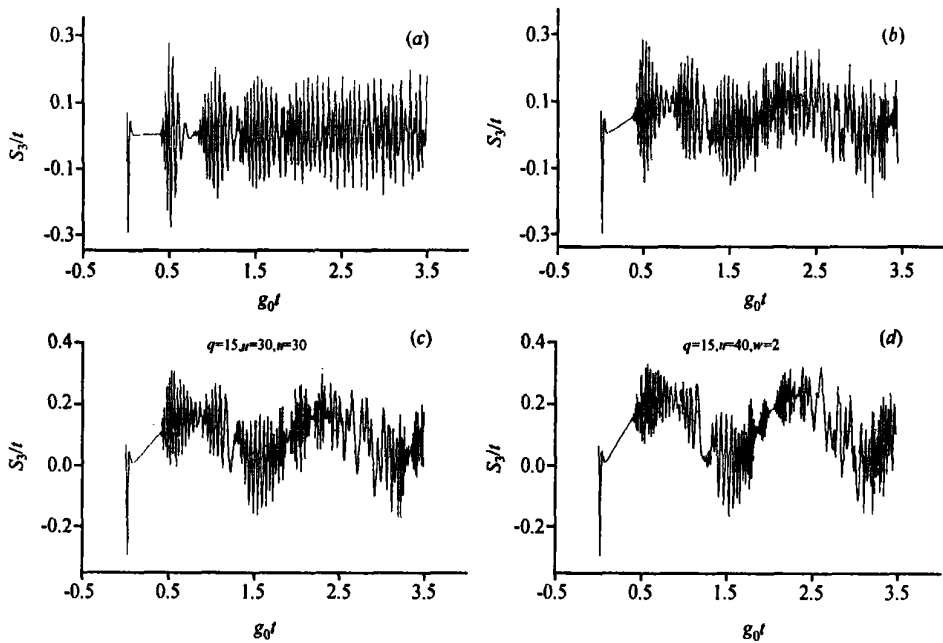


图 2  $n_0 = 15$ ,  $u$  分别取  $0g_0, 20g_0, 30g_0, 40g_0$  时  $S_3(t)$  随时间  $g_0t$  的演化  
(a) ——  $u = 0$ ; (b) ——  $u = 20g_0$ ; (c) ——  $u = 30g_0$ ; (d) ——  $u = 40g_0$

#### 4 结论

本文在标准多光子 J-C 模型的基础上, 在旋波近似下, 对标准 J-C 模型进行推广, 考虑相互作用光场频率随时间以正弦函数形式作小量变化的情形, 研究了二能级原子通过多光子跃迁与单模

辐射场相互作用系统中场熵的演化规律, 利用数值计算方法给出原子算符  $S_3(t)$  平均值随时间的演化曲线。研究结果表明: 原子算符  $S_3(t)$  平均值的演化呈现出周期性崩塌和恢复效应。原子算符  $S_3(t)$  平均值随时间的演化受场频率随时间正弦函数形式变化的调制, 场频率振荡的幅值  $u$  越大调制作用越强。在场频率振荡的幅值  $u$  大于一定值后, 演化曲线的中心表现出明显的周期性变化规律, 曲线中心呈现出正弦函数变化的轮廓。场频率变化的角频率  $\omega$  增大一倍, 其周期性变化的频率也增大一倍。

## 参考文献

- [1] Jaynes E T, Cummings F W. Comparison of Quantum and Semiclassical Radiation Theory with Application to the Beam Maser [J]. *Proc IEEE*, 1963, 51: 89—109.
- [2] Zhou P, Hu Z L, Peng J S. Effect of Atomic Coherence on the Collapses and Revivals in Some Generalized Jaynes-Cummings Models [J]. *J Mod Opt*, 1992, 39(1): 39—62.
- [3] 郭红, 彭金生. 双模 Jaynes-Cummings 模型中原子偶极压缩与双模光场压缩间的关联 [J]. *光学学报*, 1998, 18(2): 135—140.
- [4] 詹佑邦. 非共振双光子 Jaynes-Cummings 模型中原子的偶极压缩 [J]. *物理学报*, 1994, 43(6): 31.
- [5] 周鹏, 彭金生. 双光子 Jaynes-Cummings 模型中原子的压缩效应 [J]. *物理学报*, 1989, 38(2): 2044—2048.
- [6] 田永红, 徐大海, 彭金生. 级联三能级原子的偶极振幅平方压缩 [J]. *量子电子学报*, 2001, 18(1): 334—339.
- [7] 王晓光, 于荣金, 于桦. 依赖于时间的模型中的反聚束效应 [J]. *光子学报*, 1998, 27(4): 304—308.
- [8] 刘素梅, 刘三秋. Kerr 介质中受激三能级原子的场熵演化特性 [J]. *量子电子学报*, 2003, 20(1): 60—659.
- [9] 刘素梅. Kerr 介质中 V 型原子与场系统的非经典特性 [J]. *光电子. 激光*, 2004, 15(7): 871—876.

## Atomic Dynamical Property in the Multiphoton Jaynes-Cummings Model with a Time-Varying Frequency

J IANG Xun

(Department of Electronic Engineering, Nanping Teachers College, Wuyishan, Fujian 354300, P. R. China)

**Abstract** The atomic dynamical properties in the multiphoton Jaynes-Cummings model are studied by the numerical method. The frequency of the field varying with time in the sinusoidal forms has been considered. The atomic dynamical properties are influenced by the frequency parameters and the field varying with time.

**Key words** Two-Level Atom, Jaynes-Cummings Model, Frequency of Field Varying with Time, Dynamical Property.

### 《光谱实验室》实际售价连续 3 年下降

由于投稿数量不断增加, 为了保证出版周期, 《光谱实验室》从 2006 年第 1 期开始, 在 2005 年的基础上, 每期正文增加页码 16 页, 而售价保持不变:

2003 年售价: 20 元/册, 页码为 160 页/册, 平均 0.125 元/页;

2004 年售价: 25 元/册, 页码为 208 页/册, 平均 0.120 元/页。

2005 年售价: 25 元/册, 页码为 224 页/册, 平均 0.112 元/页。

2006 年售价: 25 元/册, 页码为 240 页/册, 平均 0.104 元/页。

因此, 实际售价连续 3 年下降。

《光谱实验室》编辑部