

邹志红, 王乐娟. 2009. 湖泊富营养化趋势的灰色马尔柯夫预测 [J]. 环境科学学报, 29(2): 427-432

Zou Z H, Wang L J. 2009. Gray Markov forecast of lake eutrophication [J]. Acta Scientiae Circumstantiae, 29(2): 427-432

湖泊富营养化趋势的灰色马尔柯夫预测

邹志红*, 王乐娟

北京航空航天大学经济管理学院, 北京 100083

收稿日期: 2008-03-25 修回日期: 2008-06-20 录用日期: 2008-12-22

摘要: 根据水质时间序列具有趋势性和波动性的特点, 将灰色马尔柯夫模型应用于太湖、滇池、巢湖三大湖泊水质富营养化趋势预测, 其预测值可看成趋势项和随机波动项之和. 预测过程如下: ①用 t 检验准则判断并剔除序列中的异常数据, 保证 GM(1, 1) 模型精度; ②建立 GM(1, 1) 模型, 对时序数据进行拟合, 找出其变化趋势并建立趋势项; ③根据最大残差划分状态空间, 进行马尔柯夫预测, 找出波动性规律并建立随机波动项. 预测结果显示: 太湖、滇池、巢湖预测结果的相对误差分别为 3.59%、1.73%、2.20%, 平均相对误差为 2.50%, 比单纯的灰色 GM(1, 1) 模型降低了 0.32%.

关键词: 灰色模型; 马尔柯夫模型; 预测; 富营养化

文章编号: 0253-2468(2009)02-427-06 中图分类号: X824 文献标识码: A

Gray Markov forecast of lake eutrophication

ZOU Zhihong*, WANG Lejuan

School of Economics and Management, Beihang University, Beijing 100083

Received 25 March 2008

received in revised form 20 June 2008

accepted 22 December 2008

Abstract Because water quality time series have characteristic trends and fluctuations, the Gray Markov model was used to forecast the eutrophication trend for three lakes: Tai Lake, Dian Lake and Chao Lake. The forecast value can be seen as the sum of the trend and fluctuation components. The main procedures of this approach include: ① abnormal data are identified and removed using t -test criteria; ② the GM(1, 1) model is built and trend items established through finding the various trends; ③ state space is divided according to the maximum error and fluctuation items are established using the Markov forecast. The forecast results show: the relative errors of the three lakes are 3.59%, 1.73% and 2.20%. The average relative error is 2.50%, which is 0.32% lower than the pure GM(1, 1) model.

Keywords GM(1, 1) Model; Markov Model; forecast; eutrophication

1 引言 (Introduction)

湖泊水质趋势预测对湖泊水环境的规划、评价和管理具有重要意义. 我国是一个湖泊众多的国家, 其中大于 1 km^2 的天然湖泊有 2300 余个, 湖泊面积为 70988 km^2 , 湖泊总贮水量为 $7.077 \times 10^{11} \text{ km}^3$, 是我国重要的淡水资源之一, 是人民生活不可缺少的宝贵资源 (黄永基等, 2002). 但是近些年来, 湖泊水环境污染问题日益突出, 其中湖泊水质富营养化是其存在的根本问题. 为了有效地反映湖泊水质未来污染状况, 准确预测水质富营养化随时间变化趋势就显得极为重要.

目前, 常用的预测方法有混沌理论时间序列预测法 (Sivakumar *et al.*, 1998; 徐敏等, 2003)、神经网络模型预测法 (王瑛等, 1997; 邹志红等, 2007)、支持向量机 (许葆华, 2008)、灰色系统理论预测法 (李如中等, 2003; 戴志军, 2002) 等, 这些方法为水环境管理和污染防治提供了决策支持. 受水文、水质监测条件的限制, 水质预测过程中往往缺乏长期的水质资料, 这限制了神经网络模型等需要大量实测数据的方法在水质预测中的应用. 而灰色系统分析法对于信息不完整 (或不完全) 情况, 具有良好的适用性, 目前, 在水质预测方面使用较多的是灰色 GM(1, 1) 模型 (李如忠, 2006); 但对于数据序列的复

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 50778009)

Supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 50778009)

作者简介: 邹志红 (1958-), 女, 副教授, E-mail: zouzhihong@buaa.edu.cn; * 通讯作者 (责任作者)

Biography: ZOU Zhihong (1958-), female, associate professor, E-mail: zouzhihong@buaa.edu.cn; * Corresponding author

杂性和波动性, GM (1, 1)模型的预测结果可能会出现较大的偏差, 这使人们不断改进灰色建模方法, 以提高预测结果的可靠性. 向跃霖 (1997)基于灰色系统理论提出了水质预测灰色幂级数曲线模型 GPSM (1), 并对地表水 COD_{Mn}指数进行了预测, 取得了较好的拟合、预测精度. 戴志军等 (2002)则在构建 GM (1, 1)模型前, 首先采用格拉布斯方法对可能影响预测精度的异常数据进行判别、剔除. 李如忠 (2003)提出灰色动态模型群方法, 利用不同时段数据建立一系列灰色 GM (1, 1)模型分别预测, 并将统计平均值作为最终预测值. 王开章 (2002)在建立 GM (1, 1)模型后, 当精度不能满足要求时, 采用残差模型予以修正, 效果显著. 然而, 归根结底 GM (1, 1)模型的解是指数模型, 其预测的几何图形是一条较为光滑的曲线, 因而对随机性波动较大的数据进行预测, 其预测值就会偏高或者偏低.

马尔柯夫预测根据状态之间的转移概率来预测未来趋势, 适用于预测随机波动大的动态过程. 因此, 灰色 - 马尔柯夫模型可弥补灰色预测对随机波动大的数据序列预测精确度低的缺陷. 该模型的原理是采用灰色 GM (1, 1)模型对时序数据进行拟合, 找出其变化趋势, 在此基础上进行马尔柯夫预测 (蒋承仪, 1996). 但是, 进行马尔柯夫预测的前提是灰色趋势预测须达到一定的精度, 在进行预测之前应该对时序数据进行识别并剔除异常数据.

鉴于此, 根据水质时间序列具有趋势性和波动性的特点, 提出一种改进的灰色马尔柯夫预测方法. 用 *t*检验准则剔除时间序列中的异常数据以提高建模的精度, 然后将灰色马尔柯夫模型用于湖泊水质富营养化趋势预测, 并与单纯的灰色模型进行比较研究. 旨在预测太湖、巢湖、滇池 2005年下半年水质变化趋势, 并提供了一种新的水质短期趋势预测方法.

2 灰色马尔柯夫预测模型 (Gray markov forecasting model)

2.1 原始数据异常性检验

由于受物理、化学、水力学、生物学、气象学以及人类活动等多方面因素影响, 水质数据可能在某个时间段出现偏离正常范围的异常情况, 如果把把这些数据和正常数据放在一起预测, 可能会影响结果的准确性. 因此, 采用 *t*检验准则来判断异常数据并将其剔除 (肖明耀, 1980). 方法如下: 首先找出水质时间序列的最大值 $x_{m \max}$ 和最小值 $x_{m \min}$, 并对其分别进

行检验, 如果 $|x_{m \max} - x| > K(n, \alpha)\sigma$ 或者 $|x_{m \min} - x| > K(n, \alpha)\sigma$, 则 $x_{m \max}$ 或 $x_{m \min}$ 是异常数据, 应予剔除. 式中 x 及 σ 分别为不包括 $x_{m \max}$ 及 $x_{m \min}$ 的均值和标准差. *t* 检验中的 $K(n, \alpha)$ 可查表得到.

2.2 灰色 GM (1, 1) 模型

根据剔除异常数据后的水质数据建立 GM (1, 1)模型, 找出其变化趋势并建立趋势项 (蒋承仪, 1996).

设原始序列为 $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, 作一阶累加形成生成数据序列 $X^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, 其中 $x_k^{(1)} = \sum_{i=1}^k x_i^{(0)}$, 该生成序列的规律性可通过求解一阶线性微分方程 (式 (1)) 得到.

$$\frac{dX^{(1)}}{dt} = a + X^{(1)} = u \tag{1}$$

式中, a, u 为未知待估计参数. 用最小二乘法估计计算参数 a 和 u 得:

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{u} \end{bmatrix}^T = (B^T B)^{-1} B^T Y_n \tag{2}$$

式中,

$$B = \begin{bmatrix} -1/2(x_1^{(0)} + x_2^{(0)}) & 1 \\ -1/2(x_2^{(0)} + x_3^{(0)}) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -1/2(x_{n-1}^{(0)} + x_n^{(0)}) & 1 \end{bmatrix}, Y_n = \begin{bmatrix} x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

可得到时间响应模型:

$$\hat{x}_{k+1}^{(1)} = (x_1^{(0)} - u/a) e^{-ak} + u/a \tag{3}$$

式中, $\hat{x}_{k+1}^{(1)}$ 是一次累加生成量, 还需求出原值 $\hat{x}_{k+1}^{(0)}$, 即 $\hat{x}_{k+1}^{(0)} = \hat{x}_{k+1}^{(1)} - \hat{x}_k^{(1)} = (1 - e^{-a})(x_1^{(0)} - u/a) e^{-ak}$, 得到趋势项预测值为 $\hat{x}_k^{(0)} = A e^{-a(k-1)}$, 其中 $A = (1 - e^{-a})(x_1^{(0)} - u/a)$, $k = 1, 2, \dots$.

2.3 状态的划分

对于一个具有马氏链特点的平稳随机序列, 以预测曲线 $\hat{x}_k^{(0)} = A e^{-a(k-1)}$ 为基准, 在其上下两侧作 *s* 条与之平行的曲线, 将其划分为 *s* 个状态, 任一状态表示为:

$$x_i = [x_{i1}, x_{i2}], x_{i1} = \hat{x}_k^{(0)} + A_i, x_{i2} = \hat{x}_k^{(0)} + B_i, i = (1, 2, \dots, s), A_i, B_i \text{ 为状态常数} \tag{4}$$

由于水质数据较少, *s* 值可适当取小, 一般取 $s = 4$ 令

$$u = \max\{|x_k - \hat{x}_k|\} \tag{5}$$

状态常数 A_i, B_i 取 $\pm u, \pm 0.5u$ 就足够了 (赵瑞贤等, 2007), 如图 1 所示.

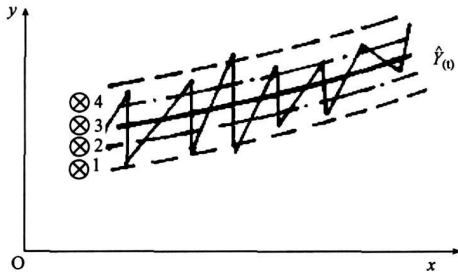


图 1 状态划分
Fig 1 State division

2.4 预测值的确定

经上述状态划分后, 数据序列由状态 x_i 转移到状态 x_j 的状态转移概率为:

$$p_{ij}^k = \frac{M_{ij}(k)}{M_i}; \quad i, j = 1, 2, \dots, s \quad (6)$$

式中, $M_{ij}(k)$ 表示水质数据由状态 x_i 经过 k 步转移到状态 x_j 的原始水质数据样本数; M_i 表示处于 x_i 状态的原始水质数据样本数; p_{ij}^k 表示水质数据由状态 x_i 经过 k 步转移到状态 x_j 的概率. 而在利用状态转移概率矩阵分析实际问题时, 一般只需考虑一步转移概率 $p^{(1)}$, 其状态转移概率矩阵表示为:

$$p^{(1)} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{s1} & p_{s2} & \dots & p_{ss} \end{bmatrix} \quad (7)$$

设系统现在处于状态 x_i , 考察一步状态转移概率矩阵 $p^{(1)}$ 的第 i 行就可以明确系统下一步状态和转移概率 p_{ij} , 其一步灰色-马尔柯夫预测值可由各状态转移概率之和求得 (岳朝龙, 1999), 即为趋势项和波动项之和:

$$\hat{x}_k = x_k^{(0)} + \sum_{j=1}^s 1/2(A_j B_j) p_{ij} \quad (8)$$

3 实例研究 (Case study)

3.1 研究区域

太湖、滇池、巢湖三大湖泊是我国内陆最大的淡水湖泊, 随着经济的快速发展, 生活用水、农业化肥使用、畜禽和水产养殖对水环境的影响程度越来越大, 水环境富营养化问题较为突出, 而综合营养状态指数 (TLI) 可反映水质富营养化程度. 因此, 选取此三大湖泊 2004 年 1 月 ~ 2005 年 6 月 (共 18 个月) 的营养状态指数 (TLI) 为时间序列, 建立灰色马尔柯夫预测模型, 并用实际值 (2005 年 7 月 ~ 12 月, 共 6 个月) 进行检验. 样本的选取基于两点考虑: 一是营养状态指数 (TLI) 能综合反映湖泊的水质富营养化程度, 并具有趋势性; 二是数据具有一定波动性, 但范围不是很大 (原始数据序列如图 2 所示, 数据来源于“中国环境监测网水质月报”).

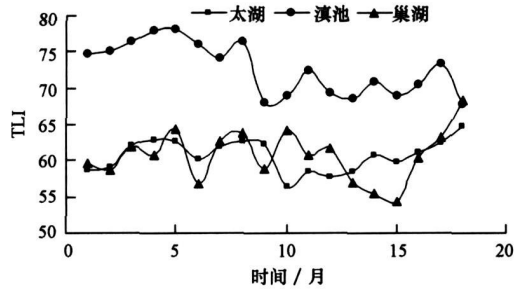


图 2 三大湖泊营养状态指数 (TLI) 值
Fig 2 TLI values of the three lakes

3.2 数据异常值判断

进行水质预测之前, 首先判别时间序列中的异常数据. 以巢湖水质数据序列为例, 共 18 个样本点, 利用 t 检验准则, 计算其均值为 60.7, 标准差为 2.72, 取显著性水平 0.05, 查表得 $K(18, 0.05) = 2.18$. 通过计算得:
 $|x_{max} - x| = |68.5 - 60.7| = 7.8 > K(n, \alpha) = 5.93$
则第 18 个样本点为异常数据, 建模时不与考虑, 滇池与太湖处理结果如表 1 所示.

表 1 异常数据处理

Table 1 Abnormal data processing

地点	观测数	最大值	最小值	平均值	标准差	$K(18, 0.05)$	$K(n, \alpha)\sigma$	异常数据
太湖	18	64.8	56.4	60.78	1.78	2.18	3.88	64.8
滇池	18	78.1	67.9	72.61	3.27	2.18	7.13	无
巢湖	18	68.5	54.4	60.70	2.72	2.18	5.93	68.5

3.3 灰色-马尔柯夫预测

1) 建立 GM (1, 1) 模型: 以巢湖水质为例, 利用剔除异常点后的时间序列建立 GM (1, 1) 模型, 得灰

色模型参数, $\hat{b} = \begin{bmatrix} a \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0027 \\ 61.82 \end{bmatrix}$, 则时间相应函数式如下:

$$\hat{x}_k^{(0)} = 61.82e^{-0.0027(k-1)}, k = 1, 2, \dots, n$$

可求得拟合值 $\hat{x}_k^{(0)}$ 和一次残差 $\Delta x(k) = \hat{x}_k^{(0)} - x_k^{(0)}$.

2) 状态的划分: 由计算得, 模拟值与预测值的最大残差为 $\max \Delta x(k) = 5.05$, 以 $\hat{x}_k^{(0)} = 61.82e^{-0.0027(k-1)}$ 曲线为基准, 考虑实际意义, 划分为 4 个状态. 取 A_i, B_i 为 $\pm u, \pm 0.5u$, 则 4 个状态划分为 (见图 3):

$$\begin{aligned} r_1 &= [x_k^{(0)} - 5.05, x_k^{(0)} - 2.5], \\ r_2 &= [x_k^{(0)} - 2.5, x_k^{(0)}], \\ r_3 &= [x_k^{(0)}, x_k^{(0)} + 2.5], \\ r_4 &= [x_k^{(0)} + 2.5, x_k^{(0)} + 5.05] \end{aligned}$$

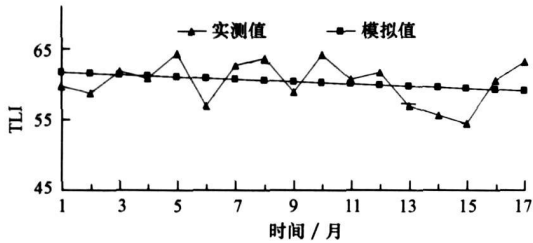


图 3 巢湖 TLI 状态划分

Fig 3 TLI state division of Chao Lake

3) 预测值的取定: 由上图可以看出, 以 GM(1, 1) 预测曲线 $\hat{x}_k^{(0)} = 61.82e^{-0.0027(k-1)}$ 为中心, 将系统划分为 4 个条形区域, 即 r_1, r_2, r_3, r_4 4 个状态, 落入各个状态的样本点分别为 4, 5, 3, 5. 由 r_1 一步转移到 r_1, r_2, r_3, r_4 的样本点个数分别为 0, 1, 1, 1 (第 17 个样本点因没有下一步转移状态不考虑在内). 同样可以计算其它状态样本点的一步转移值, 得到一步转移概率矩阵:

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 3/5 & 0 & 2/5 \end{bmatrix}$$

要预测第 19 期 (2005 年 7 月) 的 TLI 浓度值, 由图 3 看出, 第 17 期样本点处于状态 r_1 , 由 $P^{(1)}$ 矩阵第一行可知, 第 19 期在状态 r_2, r_3, r_4 的概率分别为 $1/3$, 则其预测值为

$$\hat{y}_{19} = \hat{x}_{19}^{(0)} + \sum_{j=1}^s 1/2(A_j B_j) p_{ij} = \hat{x}_{19}^{(0)} + 1/2(p_{12} \times 0.5u + p_{13} \times (-0.5u) + p_{14} \times (-0.5u)) = 58.39$$

同理, 第 20~24 期 (2005 年 8~12 月) 数据亦可通过此方法预测. 巢湖、太湖、滇池预测结果见表 2

表 2 GM(1, 1) 预测值与灰色马尔柯夫预测值

Table 2 Forecasting values of GM(1, 1) and Gray Markov model

地点	时间 / 月	实测值	GM(1, 1)		灰色-马尔柯夫模型	
			预测值	相对误差	预测值	相对误差
巢湖	19	56	58.81	5.02%	58.39	4.27%
	20	56	58.65	4.74%	59.07	5.48%
	21	61	58.50	4.10%	58.75	3.69%
	22	58	58.34	0.58%	58.59	1.02%
	23	60	58.18	3.03%	58.43	2.62%
	24	61	58.02	4.88%	58.27	4.48%
太湖	19	63	60.94	3.28%	61.8	1.90%
	20	60	60.94	1.57%	61.8	3.00%
	21	58	60.95	5.08%	60.9	5.00%
	22	61	60.95	0.07%	60.9	0.16%
	23	62	60.96	1.68%	61.85	0.24%
	24	61	60.97	0.05%	60.97	0.05%
滇池	19	67	67.90	1.35%	68.1	1.64%
	20	70	67.41	3.70%	67.2	4.00%
	21	68	66.92	1.59%	67.1	1.32%
	22	65	66.43	2.20%	66.18	1.82%
	23	70	65.95	5.79%	67.13	4.10%
	24	65	65.47	0.72%	65.22	0.34%

从表 2 可以看出, 2 个预测模型的相对误差都在 6% 以下. 2 个模型的平均相对误差比较见表 3, 用灰色-马尔柯夫模型预测三大湖泊未来 6 个月的水质, 一次残差分别为 2.1、1.203、1.54 相对误差分别为 3.59%、1.73%、2.20%, 平均相对误差为 2.50%, 比单纯用灰色 GM(1, 1) 模型降低了 0.32%. 因此, 灰色-马尔柯夫模型对于具有趋势性和波动性的数据预测精度是优于灰色 GM(1, 1) 预测模型的.

表 3 GM(1, 1) 与灰色马尔柯夫模型结果比较

Table 3 Results comparison of GM(1, 1) and Gray Markov model

地点	模型类型	平均一次残差	平均相对误差
巢湖	GM(1, 1)	2.2	3.8%
	灰色马尔柯夫	2.1	3.59%
太湖	GM(1, 1)	1.2	1.96%
	灰色马尔柯夫	1.03	1.73%
滇池	GM(1, 1)	1.76	2.7%
	灰色马尔柯夫	1.5	2.2%
三大湖泊综合	GM(1, 1)	1.72	2.82%
平均值	灰色马尔柯夫	1.54	2.5%

三大湖泊未来六期的预测值如图 4 所示. 由图 4 可以看出, 滇池的 TLI 有下降趋势, 而太湖和巢湖的 TLI 没有显著性变化. 这说明在未来半年期间, 滇池的富营养化趋势下降, 而巢湖和太湖富营养化趋势没有显著变化, 这与实际趋势相符合.

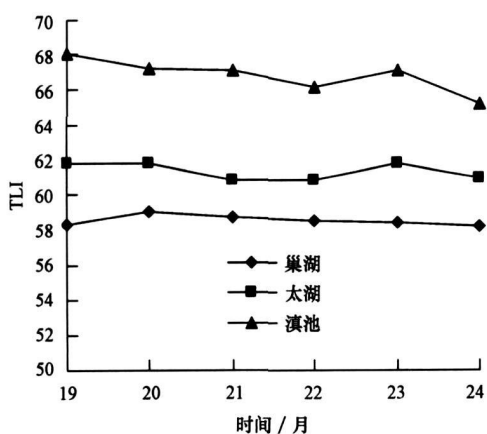


图 4 三大湖泊灰色-马尔科夫 2005 年 6~12 月预测值

Fig. 4 Gray Markov forecast values during June 2005-December

4 结论 (Conclusions)

1) 水质时间序列具有趋势性和波动性的特点, 其预测值可看成趋势项和随机波动项之和. 2) 利用

灰色-马尔柯夫模型对太湖、巢湖、滇池 2005 年 6 月 ~ 12 月营养状态指数 (TLI) 进行预测, 其相对误差分别为 3.59%、1.73%、2.20%, 平均相对误差为 2.50%, 比单纯用灰色 GM(1, 1) 模型降低了 0.32%. 3) 预测结果表明, 滇池的富营养化状态有下降趋势, 已从重度富营养化转变为中度富营养化; 而太湖水质维持在中度富营养化状态, 巢湖为轻度富营养化状态, 两个湖的富营养化状态趋势大致保持不变.

参考文献 (References):

- 戴志军, 彭晓春, 黄鹤. 2002 灰色模型理论在河流污水预测中的应用 [J]. 环境保护, (1): 28-29
- Dai Z J, Peng X C, Huang H. 2002 Application of grey forecast on river water pollution [J]. Environmental Protection (1): 28-29 (in Chinese)
- 黄永基, 陈晓军. 2002 我国水资源需求管理现状及发展趋势分析 [J]. 水科学进展, 11(2): 215-220
- Huang Y J, Chen X J. 2002 Water demand management present and development trend of China [J]. Advanced In Water Science 11(2): 215-220 (in Chinese)
- 蒋承仪. 1996 灰色马尔柯夫预测模型 [J]. 重庆建筑大学学报, 18(3): 116-120
- Jiang C Y. 1996 Grey-Markov forecasting model [J]. Journal of Chongqing Jianzhu University, 18(3): 116-120 (in Chinese)
- 李如忠. 2006 水质预测理论模式研究进展与趋势分析 [J]. 合肥工业大学学报, 29(1): 26-30
- Li R Z. 2006 Advance and trend analysis of theoretical methodology for water quality forecast [J]. Journal of Hefei University of Technology, 29(1): 26-30 (in Chinese)
- 李如忠, 王超. 2003 灰色动态模型群法在河流水质与测中的应用初探 [J]. 中国农村水利水电, (1): 76-78
- Li R Z, Wang C. 2003 Primary study on application of grey dynamic model groups for prediction of river water quality [J]. China Rural Water Power (1): 76-78 (in Chinese)
- Sivakumar B, Liong S Y. 1998 Evidence of chaotic behavior in Singapore rainfall [J]. Water Resource Research 34(2): 301-310
- 王开章, 刘福胜, 孙鸣. 2002 灰色模型在大武水源地水质预测中的应用 [J]. 山东农业大学学报, 33(1): 66-71
- Wang K Z, Liu F S, Sun M. 2002 The application of grey model in dawu water quality prediction water resource site [J]. Journal of Shandong Agricultural University, 33(1): 66-71 (in Chinese)
- 王瑛, 桑大勇, 孙林岩. 1997 人工神经网络方法在我国环境预测中的应用 [J]. 环境科学, 18(9): 81-84
- Wang Y, Sang D Y, Sun L Y. 1997 The application of artificial neural network in Chinese environmental forecast [J]. Environmental Science 18(9): 81-84 (in Chinese)
- 向跃霖. 1997 G-PSM(1) 模型在预测地表水 COD_{Mn} 指数中的应用 [J]. 水资源保护, (2): 38-41
- Xiang Y L. 1997 The application of G-PSM(1) model in surface water

- COD_{Mn} index prediction [J]. *Water Resources Protection* (2): 38—41 (in Chinese)
- 肖明耀. 1980. 实验误差估计与数据处理 [M]. 北京: 科学出版社, 150—155
- Xiao M Y. 1980. *Experimental Error Estimates and Data Processing* [M]. Beijing: Science Press, 150—155 (in Chinese)
- 许葆华, 李洪儒, 年海涛. 2008. 支持向量机在时间序列预测中的应用 [J]. *微计算机信息*, 24(1): 253—254
- Xu B H, Li H R, Nian H T. 2008. Application of support vector machine in time series prediction [J]. *Microcomputer Information*, 24(1): 253—254 (in Chinese)
- 徐敏, 曾光明, 谢更新, 等. 2003. 混沌理论在河流溶解氧预测中的应用初探 [J]. *环境科学学报*, 23 (6): 776—780
- Xu M, Zeng G M, Xie G X, *et al.* 2003. Preliminary research on the application of chaos theory to dissolved oxygen prediction [J]. *Acta Scientiae Circumstantiae* 23 (6): 776—780 (in Chinese)
- 岳朝龙, 王琳. 1999. 股票价格的灰色-马尔柯夫预测 [J]. *系统工程*, 17(6): 54—59
- Yue C L, Wang L. 1999. Grey-Markov forecast of the stock price [J]. *System Engineering* 17(6): 54—59 (in Chinese)
- 赵瑞贤, 孟晓风, 王国华. 2007. 基于灰色马尔柯夫预测的测量仪器校准间隔动态优化 [J]. *计量学报*, 28(2): 184—187
- Zhao R X, Meng X F, Wang G H. 2007. Optimizing calibration interval of measuring instrument dynamically based on gray markov forecasting model [J]. *Acta Metrologica Sinica* 28(2): 184—187 (in Chinese)
- 邹志红, 王学良. 2007. BP模型在河流水质预测中的误差分析 [J]. *环境科学学报*, 27(6): 1038—1042
- Zou Z H, Wang X L. 2007. The errors analysis for river water quality prediction based on BP modeling [J]. *Acta Scientiae Circumstantiae* 27(6): 1038—1042 (in Chinese)