

光谱法分析代数迭代重建算法及改进

宋一中^{1, 2}, 魏本征³, 赵志敏¹

1 南京航空航天大学理学院, 江苏 南京 210016

2 德州学院物理系, 山东 德州 253000

3 山东中医药大学理工学院, 山东 济南 250014

摘要 采用光谱分析技术, 系列研究了已有代数迭代重建算法, 并进一步研制了改进算法—简单自相关代数迭代重建算法(SSART)。采用数值模拟的方法模拟重建一个含遮挡物场, 研究了SSART 模拟效果和重建精度。作为对照, 分析了已有的传统代数迭代算法同条件下的重建结果, 包括基本代数迭代重建算法(ART)、联合代数迭代重建法(SART)和改进的联合代数迭代重建法(MSART)。重建精度用均方误差(MSE), 绝对平均误差(AVE)和峰值相对误差(PE)三种误差指数标定。结果发现, SSART 重建结果的三种误差指数都明显减小, 其中MSE在 10^{-4} 数量级上比ART的降低了26.6%, PE在 10^{-2} 数量级降低了77.6%。因此, SSART 重建含遮挡物模型场时, 重建精度大幅度提高, 重建效果明显改善, 对传统代数迭代重建算法显著改进。

关键词 数值模拟; 重建精度; 误差分析; 代数迭代法; 光学层析

中图分类号: O361 文献标识码: A DOI: 10.3964/j.issn.1000-0593(2008)10-2365-05

引言

应用光学层析(optical computerized tomography: OCT)显示复杂流场需要一种收敛速度快、稳定性好、精度高, 且能重建含遮挡物、有限采样角等实际工况下复杂流场的重建算法^[1, 2]。目前, 关于OCT的研究主要还集中在重建算法上^[3, 4]。至今已经提出了许多算法, 这些算法大致可以分为两类^[5, 6]: 变换类算法(卷积)和级数类算法(迭代)。级数类算法适于非完全数据重建^[7, 8], 典型代表是代数迭代法^{9, 10}(algebraic reconstruction technique: ART), 在OCT领域得到广泛研究^[11, 12], 并提出了ART³^[13], SART^[14], MART^[15]等许多种改进算法。我们的前期工作发现这些算法应用于复杂流场的显示时遇到了迭代稳定性和重建精度等问题^[16, 17], 流场可视化需要开发新的有效重建算法。

本文针对复杂流场的显示需求出发, 开发了一种新的算法SSART, 用该算法重建含遮挡物场, 测试其重建效果。作为对照, 也模拟了同条件下ART, SART, MSART的重建结果。

1 数值模拟

1.1 三维场模拟

本文用一个非对称的复合三 Gauss 峰函数来模拟三维流场的一个切片

$$f(x, y) = \exp\left\{\frac{-6((x-0.5)^2 + y^2)}{1 - (x^2 + y^2)}\right\} + 0.7 \exp\left\{\frac{-6((x+0.5)^2) + (y-0.5)^2}{1 - (x^2 + y^2)}\right\} + 0.5 \exp\left\{\frac{-6((x-0.5)^2) + (y+0.5)^2}{1 - (x^2 + y^2)}\right\} \quad (1)$$

函数图像如图1所示。场中心包含半径 $R_c = 0.5$ 的圆柱状不透明物时的图像如图2所示。

1.2 投影

重建区域划分成 50×50 的网格, 同方向取100条光线均匀穿过重建区, 光线间距设置为 $\sqrt{2}d/2$, 其中 d 是网孔边长。每 f 取一个投影, 全方向共获180个投影。

1.3 ART重建

1.3.1 算法描述

根据前面1.2节的投影设置, Radon 变换可表示为下式^[18]

收稿日期: 2007-04-18, 修订日期: 2007-07-26

基金项目: 国家自然科学基金项目(10404022), 中国博士后科学基金项目(20060400930)和江苏省博士后基金项目(0602040B)资助

作者简介: 宋一中, 1971年生, 南京航空航天大学仪器科学与技术博士后 e-mail: yizhongsong@126.com

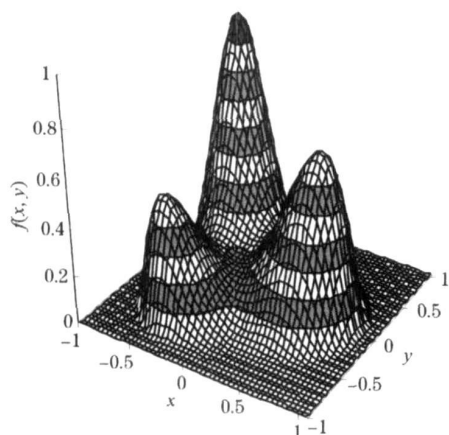
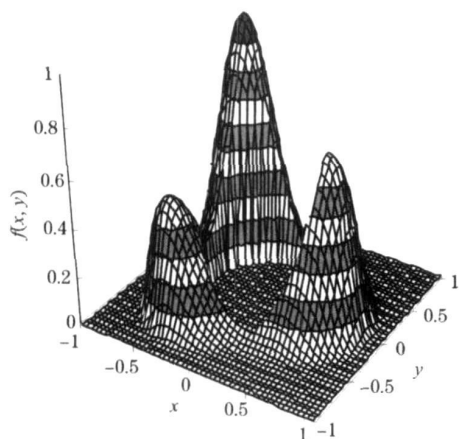


Fig. 1 The model field

Fig. 2 Model with a column opaque block with $R_c=0.5$

$$P = [Rf](x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dz = \sum_{a=0}^{179} \sum_{k=0}^{99} \sum_{i=0}^{49} \sum_{j=0}^{49} g[i, j] \cdot A_{a, k, [i, j]} = \sum_{a=0}^{179} \sum_{k=0}^{99} p_{a, k} \quad (2)$$

则 Radon 逆变换的 ART 算法可表示为^[18]

$$g[i][j]^{time+1} = g[i][j]^{time} + \omega \cdot (P_{k_difference} / \sum_{i=0}^{49} \sum_{j=0}^{49} A_{a_0, k, [i, j]}) \cdot (A_{a_0, k, [i, j]} / d) \quad (3)$$

式中

$$P_{k_difference} = p_{a_0, k} - \sum_{i=0}^{49} \sum_{j=0}^{49} g[i][j]^{time} \cdot A_{a_0, k, [i, j]}, \quad g[i][j]^{time}$$

是经 time 次迭代后像素 $[i, j]$ 的值; $A_{a_0, k, [i, j]}$ 是指 a_0 投影角下第 k 条光线被第 $[i, j]$ 个网格截取的长度; $d=1$ 是网格 (网孔) 边长, 这里的作用主要是调节量纲。

1.3.2 迭代

等间隔顺序取 30 个投影用来重建, 根据 (3) 式, 迭代 200 次, 结果在图 3 给出。

从图 3 可见, 重建场峰的位置、形状与原场的相似。仔细与图 2 比较可发现, 主峰明显变矮, 变粗了; 最小的峰存

在同样问题; 主峰、小峰分别矮了 8.1%、12.0%, 中锋比原场的高了 2.4%, 顶部明显变形。内边界不规则, 比原场有较大失真。外边界及底边出现了明显的波动, 这种波动是 ART 本身固有的缺陷^[19]。

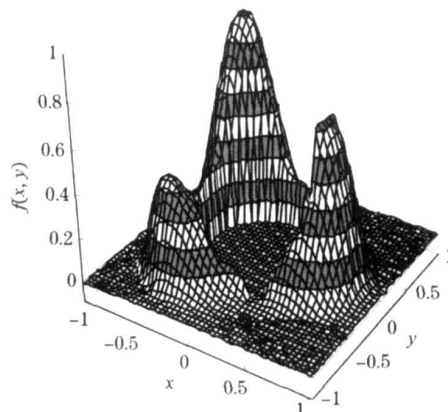


Fig. 3 Reconstructed field after 200 iterations by ART

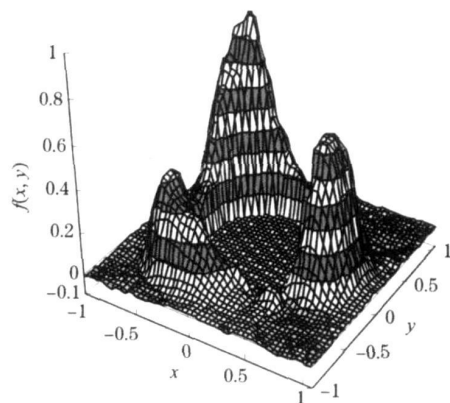


Fig. 4 Reconstructed field after 200 iterations by SART

1.4 SART 重建

1.4.1 算法描述

Radon 变换表达式同 (2) 式。Radon 逆变换的 SART 算法可表示成下式

$$g[i][j]^{time+1} = g[i][j]^{time} + \omega \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{99} \left[\left(P_{k_difference} \setminus \sum_{i=0}^{49} \sum_{j=0}^{49} A_{a_0, k, [i, j]} \right) \cdot (A_{a_0, k, [i, j]}) \right] \setminus \sum_{k=0}^{99} A_{a_0, k, [i, j]} \right\} \quad (4)$$

1.4.2 迭代

根据 (4) 式, 迭代 200 次, 结果在图 4 给出。

重建场 3 个峰都明显变形, 均变矮, 变粗, 不规则。主峰、中锋、小峰分别矮了 9.5%, 9.0%, 14.1%。外边界及底边波动比 ART 重建结果更明显。

1.5 MSART 重建

1.5.1 算法描述

Radon 逆变换的 MSART 算法可表示为下式

$$g[i][j]^{time+1} = g[i][j]^{time} + \omega \cdot$$

$$\sum_{k=0}^{99} \frac{P_{k_diff_average} \cdot A_{a_0-k_f[i,j]} \cdot g[i][j]^{time}}{\sum_{i=0}^{49} \sum_{j=0}^{49} A_{a_0-k_f[i,j]} \cdot g[i][j]^{time}} \cdot \frac{1}{\sum_{k=0}^{99} A_{a_0-k_f[i,j]}} \quad (5)$$

其中: $P_{k_diff_average} = P_{k_difference} \sum_{i=0}^{49} \sum_{j=0}^{49} A_{a_0-k_f[i,j]}$ 。

1.5.2 迭代

根据(5)式, 迭代 200 次, 结果在图 5 给出。

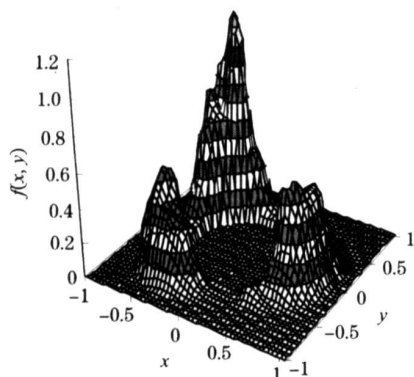


Fig 5 Reconstructed field after 200 iterations by MSART

重建场 3 个峰都明显变形, 而且主峰高出了 17.5%, 中峰矮了 16.0%。底边与原场相似。

1.6 SSART 重建

1.6.1 算法描述

将 ART 迭代式子乘以自相关因子 $\lambda = n[i][j]^{time} / C_{time}$ 得

$$g[i][j]^{time+1} = g[i][j]^{time} + \omega \cdot (P_{k_difference} \sum_{i=0}^{49} \sum_{j=0}^{49} A_{a_0-k_f[i,j]} \cdot (A_{a_0-k_f[i,j]} / d) \cdot \lambda \quad (6)$$

其中 $n[i][j]^{time}$ 表示第 $[i, j]$ 个像素 $time$ 次迭代后的值, C_{time} 是一个只与迭代次数有关的系数。

1.6.2 迭代

根据(6)式迭代 200 次, 结果在图 6 给出。

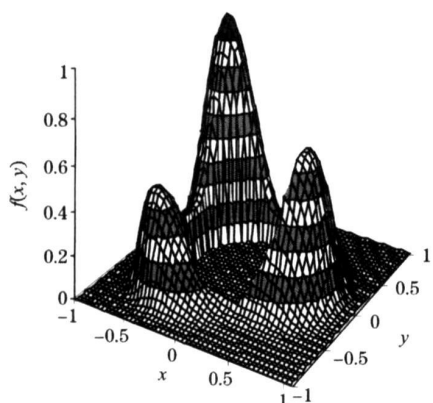


Fig 6 Reconstructed field after 200 iterations by SSART

重建场峰的位置、形状与原场的极其相似, 3 个峰的高度、形状等特征与原场都相似; 主峰、中峰、小峰分别矮了 0.7%, 4.5%, 5.6%。外边界及底边与原场相似。除内边界外, 视觉上, 图 6 是图 2 原场的精确重建。这一结果与著名的 Sun^[20] 用不同的基函数重建含遮挡物场的结果相近。

2 结果和讨论

2.1 重建结果

由图 2~ 图 6 可见, 这四种方法都能重建含遮挡物的原场, 但效果有明显差别。视觉上, SSART 重建结果与原场最相似, 其次是 ART。SART 重建含遮挡物场时, 效果比 ART 差, MSART 的效果与 SART 相比没有改进。

2.2 误差分析

各重建场的误差指数 MSE, AVE, PE^[13] 见图 7。

由图 7 可见, 各种算法的 MSE 曲线与 AVE 曲线有相似的结构和演化规律。不同算法的 MSE 曲线和 AVE 曲线差别较大。各种算法的 PE 曲线差别较大。

ART 和 SART 的 MSE 曲线结构和演化规律都十分相似, 刚开始的 0~40 次迭代中, 曲线衰减得快, 说明迭代收敛得快; 约 100 次后, 衰减变得缓慢; 约 150 次后, 衰减微弱, 分别振荡在 0.000615~0.000655 和 0.001081~0.001112 之间, 意味着 MSE 分别约为 0.000635 和 0.001096, 由此可见, SART 比 ART 的 MSE 增大了 72.6%。AVE 增大了 61.2%, 而 PE 减小了 45.3%。产生振荡的原因是条件滤波引起的, 在迭代过程中内嵌了一个 1/5 均值滤波器, 每隔 5 次启动滤波一次, 造成曲线振荡。

MSART 的 MSE 曲线演化规律与其他三种有明显差别。经过初期约 20 次迭代的剧烈衰减后, 迅速上升, 约 60 次后进入稳定的振荡状态, 振荡在 0.001037~0.001168, 平均比 ART 增大了 73.7%。MSART 的 AVE, PE 分别比 ART 增大了 16.7%, 112.0%。

SSART 的 MSE 和 AVE 曲线与 ART 和 SART 结构和演化规律都相似。MSE, AVE, PE 三种误差比相应的其他算法都小, 分别比 ART 相应的误差减小 26.4%, 32.8%, 78.3%。这些误差与 Sun^[20] 的结果近似。

3 结论

通过对 ART, SART, MSART 与 SSART 四种算法的数值模拟, 发现它们都可以重建含遮挡物场, 但 SSART 算法更精确。该算法稳定性好是代数迭代算法最突出的优点, 解决了迭代发散的根本问题。另外还有重建精度高、算法简单等优点。就我们检索的文献看是目前最优秀的代数迭代法。

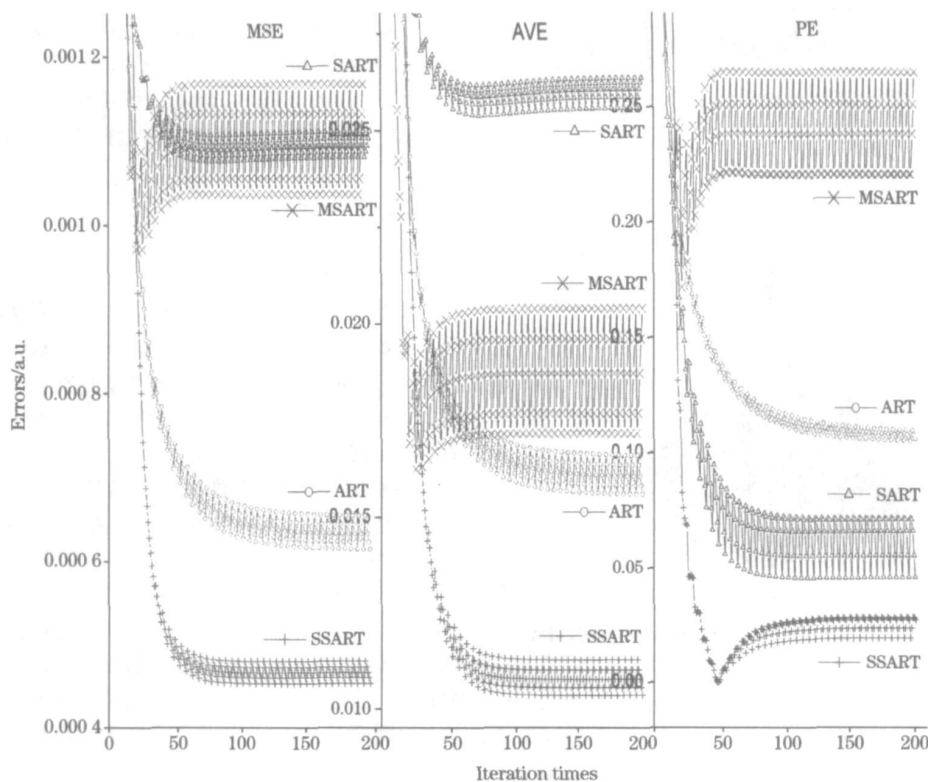


Fig 7 Errors analysis of each algorithm weighing with MSE, AVE and PE

参 考 文 献

- [1] Sweeney D W, Vest C M. Appl. Opt., 1973, 12(11): 2649.
- [2] Ramachandran G N, Lakshminarayanan A V. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1971, 68: 2236.
- [3] Natterer F. Numer. Math., 1985, 47: 343.
- [4] Bahl S, Liburdy J. A. Appl. Opt., 1991, 30(29): 4218.
- [5] Rangayyan R, Dhawan A P, Gordon R. Appl. Opt., 1985, 24(23): 4000.
- [6] Reuss D, Schultz P. H. Appl. Opt., 1987, 26(9): 1661.
- [7] Guenther R B, Kerber C W, Killian C W, et al. Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 1974, 71: 4884.
- [8] Dolovich A T, Gladwell G L. Appl. Opt., 1989, 28(20): 4411.
- [9] Richard Gordon. IEEE Transaction on Nuclear Science, 1974, NS21(3): 78.
- [10] Gordon R, Bender R, Herman G T. Journal of Theoretical Biology, 1970, 29: 471.
- [11] Herman G T, Lent A. Comput. Biology and Medicine, 1976, 6: 273.
- [12] Lent A, Tuy H. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1981, 83(2): 554.
- [13] Yao Hongbing, He Anzhi. Microwave and Optical Technology Letters, 2003, 38(2): 117.
- [14] Anderson A H, Kak A C. Ultrasonic Imaging, 1984, 6(1): 81.
- [15] Dean Verhoeven. Appl. Opt., 1993, 32(16): 3736.
- [16] SONG Yizhong, YANG Xiang jun, LIU Xue mei(宋一中, 阳向军, 刘学梅, 等). Spectroscopy and Spectral Analysis(光谱学与光谱分析), 2006, 26(10): 1918.
- [17] SONG Yizhong, SUN Tao, HU Guoying, et al(宋一中, 孙涛, 胡国英, 等). Spectroscopy and Spectral Analysis(光谱学与光谱分析), 2006, 26(8): 1411.
- [18] SONG Yizhong, HU Guoying, HE Anzhi(宋一中, 胡国英, 贺安之). Spectroscopy and Spectral Analysis(光谱学与光谱分析), 2006, 26(12): 2364.
- [19] SONG Yizhong, HE Anzhi(宋一中, 贺安之). Journal of Optoelectronics • Laser(光电子 • 激光), 2006, 17(4): 484.
- [20] Sun H, Cha S S. Optics and Lasers in Engineering, 1992, 17(35): 167.

Algebraic Reconstruction Techniques and Improvement Studied with Spectroscopy

SONG Yi zhong^{1, 2}, WEI Bei zheng³, ZHAO Zhi min¹

1. School of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China

2. Department of Physics, Dezhou University, Dezhou 253000, China

3. Institute of Science and Technology, Shandong University of Traditional Chinese Medicine, Jinan 250014, China

Abstract The present article focuses on improving algebraic reconstruction technique (ART) for optical computerized tomography (OCT). With spectroscopy, a series of traditional ARTs were analyzed in detail, then a new improved ART was developed. The new ART was named simple self-correlative algebraic reconstruction technique (SSART). With numerical simulation technique, SSART reconstructing efficiency was demonstrated by reconstructing a simulated field with an opaque object. The simulation result and reconstructing accuracy were analyzed. Many current representative ARTs were studied in order to compare the reconstructing efficiency of the new ART with that of others. These ARTs included basic algebraic reconstruction technique: ART, simultaneous algebraic reconstruction technique: SART, and modified SART: MSART. Each of those was used for reconstructing the same simulated field as that SSART was used to reconstructing. The reconstruction results under the same condition were compared with each other. Reconstruction accuracy of each ART was weighed with three error indexes, mean square error (MSE), absolute value error (AVE), and peak error (PE). As the results, each error index of the reconstruction result with SSART declined a lot. The MSE of SSART was decreased about 26.6% compared to that of ART at the level of 10^{-4} magnitude, and PE 77.6% at the level of 10^{-2} magnitude. As far as the field with an opaque object is concerned, SSART improves the reconstruction result much, and increases the reconstruction accuracy a lot. SSART improves ARTs greatly.

Keywords Numerical simulation; Reconstruction accuracy; Error analysis; Algebraic reconstruction technique; Optical computerized tomography

(Received Apr. 18, 2007; accepted Jul. 26, 2007)