第30卷,第8期
2010年8月
光谱学与光谱分析
Spectroscopy and Spectral Analysis
Vol. 30, No. 8, pp2232-2235
August, 2010

几种人眼波前像差重建算法的对比研究

高玮玮, 沈建新, 李邦明, 梁 春

南京航空航天大学机电学院, 江苏 南京 210016

摘 要 介绍了基于Hartmann-Shack传感器的Zernike模式法人眼波前像差重建模型和包括Gram-Schmidt正交变换、Householder变换和奇异值分解在内的3种算法的具体推导过程以及对比分析结论, 并利用实验测量数据进行了仿真, 结果表明3种算法精度相当, 奇异值分解算法是较为理想的人眼波前像差重建算法。

关键词 成像光学; 人眼波前像差重建; Gram-Schmidt正交化; Householder变换; 奇异值分解
中图分类号: R778.2; TP391 文献标识码: A DOI: 10.3964/j.issn.1000-0593(2010)08-2232-04

引 言

人眼视网膜是结构复杂的机体组织, 不仅眼睛本身的疾病而且人体的其他疾病都可以在眼底得到反映。因此获取高分辨率的视网膜图像, 可为视觉生理研究和疾病的早期诊断提供前所未有的有力工具。近年来, 自适应光学技术应用到眼科, 使这一设想成为可能[1-3]。在此过程中, 人眼波前像差的重建和校正是两个最核心环节。

利用H-S(Hartmann-Shack)传感器间接测得畸变波前上离散的波前斜率, 并由此复原人眼像差, 是比较常用的重建途径[4-6]。目前应用较多的重建方法有模式法、区域法以及近年来刚发展起来的从光强分布重建波前等[7]。

在研究国家(863计划)科研项目内容的基础上, 给出基于H-S传感器的Zernike模式法人眼波前像差重建模型和相应3种算法的具体推导过程以及对比分析结论, 并利用实验测量数据进行仿真, 验证算法精度。

1 仿真模型

模式法重建波前可选择的基底函数较多, 其中, Zernike多项式由于能将波前相位展开成各种像差的组合以及其良好的数学特性, 在表述人眼像差方面应用比较广泛[8-11]。

Zernike模式法重建波前的本质是建立Zernike项与波前传感器所测斜率之间的关系, 进而求解出Zernike系数, 从而得到整个人眼波前像差的表达式[12]。对于H-S传感器其子孔径内的斜率与Zernike多项式系数的关系为

$$\begin{cases} g_x(i) = \sum_{k=1}^{n} c_k \dfrac{\iint_{S_i} \dfrac{\partial Z_k(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S_i} + \varepsilon_x = \sum_{k=1}^{n} c_k Z_{xk}(i) + \varepsilon_x \\ g_y(i) = \sum_{k=1}^{n} c_k \dfrac{\iint_{S_i} \dfrac{\partial Z_k(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S_i} + \varepsilon_y = \sum_{k=1}^{n} c_k Z_{yk}(i) + \varepsilon_y \end{cases} \tag{1}$$

其中ε_x和ε_y为波前相位测量误差, n为模式项数, S_i为子孔径归一化面积。对于有m个子孔径的H-S传感器, 其与n项Zernike系数的关系用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} g_{x1} \\ g_{x2} \\ \vdots \\ g_{xm} \\ g_{y1} \\ g_{y2} \\ \vdots \\ g_{ym} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{x11}(x,y) & Z_{x12}(x,y) & \cdots & Z_{x1n}(x,y) \\ Z_{x21}(x,y) & Z_{x22}(x,y) & \cdots & Z_{x2n}(x,y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{xm1}(x,y) & Z_{xm2}(x,y) & \cdots & Z_{xmn}(x,y) \\ Z_{y11}(x,y) & Z_{y12}(x,y) & \cdots & Z_{y1n}(x,y) \\ Z_{y21}(x,y) & Z_{y22}(x,y) & \cdots & Z_{y2n}(x,y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{ym1}(x,y) & Z_{ym2}(x,y) & \cdots & Z_{ymn}(x,y) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \\ \varepsilon_{m+1} \\ \varepsilon_{m+2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2m} \end{bmatrix} \tag{2}$$

收稿日期: 2009-12-26, 修订日期: 2010-03-28
基金项目: 国家(863计划)项目(2006AA020804)和教育部"新世纪优秀人才支持计划"项目(NCET-06-0502)资助
作者简介: 高玮玮, 1985年生, 南京航空航天大学机电学院硕士研究生 e-mail: cadatc@nuaa.edu.cn, gww03020234@sina.com

记为

$$g_{2m} = G_{2m\times n}c_n + \varepsilon \tag{3}$$

其中 g_{2m} 为斜率向量，$G_{2m\times n}$ 为 Zernike 偏导数矩阵，c_n 为 Zernike 模式系数向量。如果模式重建结果达到一定的拟合精度，即(3)式中 ε 足够小时，此时

$$g = Gc \tag{4}$$

(4)式即为基于 H-S 传感器的 Zernike 模式法人眼波前像差重建模型。

(4)式中的 G 其行数 $2m$ 通常远远大于列数 n，因此该方程组是超定方程组。绝大多数情况下，超定方程组没有古典意义下的解。本文所讨论的最小二乘解是它的一种广义解，是指使残差的 2-范数取极小值的解，即

$$\| g - Gc^* \|_2 = \min_{X\in R^n} \| g - Gc \|_2 \tag{5}$$

利用该准则可推导出线性方程组

$$G^TGc = G^Tg \tag{6}$$

(6)式为求解最小二乘问题的法方程组，解其即可得模式系数 c。但在实际应用中，特别是所处理的数据量较大的情况，直接构造的法方程组往往是严重病态的，会造成计算错误，使重建失败。为避免该问题，可以有 3 类方法：一是从基底函数系入手，通过变换函数族的基底来改善法方程组的状态，如 Gram-Schmidt 正交变换；二是直接从(4)式入手，应用 Householder 变换把系数矩阵正交三角化，从而得到精确求解；三是利用奇异值分解求广义逆的方法来求解模式系数。下面分别论述。

2　算法描述

2.1　Gram-Schmidt 正交化方法

在利用法方程组求解系数过程中，法方程组常出现病态，这是由于 Zernike 多项式在离散采样点上不正交造成的[13]。可以利用 Gram-Schmidt 正交变换求出在波差数据点上离散正交的一组基底函数来避免该情况，具体论述如下：

利用该正交变换将线性无关的向量组 G_1，G_2，…，G_n 变换为一组与之等价的正交向量组 P_1，P_2，…，P_n，则(4)式可转化为

$$g = Pb \tag{7}$$

其中 $b = [b_1, b_2, \cdots, b_n]^T$，用最小二乘法[14]解(7)式即可得系数向量 b(可参见张运海(2007)的博士论文，南京航空航天大学航空宇航制造工程系)。

由 Gram-Schmidt 正交化过程可知

$$(G_1, G_2, \cdots, G_n) = (P_1, P_2, \cdots, P_n)\begin{pmatrix} 1 & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ 0 & 1 & & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

将(8)式代入(4)式并与(7)式比较，得

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ 0 & 1 & & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

据此，可以写出原来的模式系数 c 的代数表示式

$$\begin{cases} c_n = b_n \\ c_j = b_j - \sum\limits_{i=j+1}^{n} e_{ji}c_i \quad j = 1, 2, \cdots, n-1 \end{cases} \tag{10}$$

由上述过程可知，Gram-Schmidt 正交变换仍离不开法方程组的构造，只是在一定程度上改善了它的状态。

2.2　Householder 变换法

(6)式与(4)式的条件数存在如下的关系

$$\mathrm{cond}(G^TG) = \mathrm{cond}(G)^2 \tag{11}$$

由上式看出法方程组的条件比超定方程组的差，这常常使解法方程组所引起的误差比直接解(4)式舍入 G 时引起的误差大很多，从而引入了更多的模式复原误差。因此可以直接从(4)式入手，用 Householder 变换对系数矩阵 G 进行正交三角化，直接求得模式系数。

设 $x\in R^n$，$\sigma = \pm\| x \|_2$，且假定 $x \neq -\sigma e_1$，则可找到一个 Householder 矩阵 H，使

$$Hx = -\sigma e_1 \tag{12}$$

其中 $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)^T$。

对(4)式中的 G 运用上述性质经过 n 步，可得

$$G_{n+1} = H_nH_{n-1}\cdots H_2H_1G = QG = \begin{pmatrix} R \\ O \end{pmatrix} \tag{13}$$

即利用 Householder 变换产生了一个 n 阶正交矩阵 $Q = H_nH_{n-1}\cdots H_2H_1$，使得 QG 是上三角矩阵。其中 R 为 n 阶上三角非奇异实矩阵，O 为 $(2m-n)\times n$ 零矩阵。相应地将 $2m$ 维向量 Qg 分块成 n 维向量 g_1 和 $(2m-n)$ 维向量 g_2，求其残量 2-范数，即

$$\begin{aligned} \| r \|_2 &= \| g - Gc \|_2 = \| Q(g - Gc) \|_2 \\ &= \| g_1 - Rc \|_2 + \| g_2 \|_2 \end{aligned} \tag{14}$$

令 $g_1 - Rc = 0$，则 $\| r \|_2$ 达到最小，此时 $Rc = g_1$，可解得

$$c = R^{-1}g_1 \tag{15}$$

由上可知，Householder 变换完全避免法方程组的构造，因而非常稳定，但该方法计算量较大，由算法约化 $G\in R^{2m\times n}$ 大约需要 $2n^3/3$ 次乘法。

2.3　奇异值分解法

(4)式中系数矩阵 $G\in R^{2m\times n}$，其秩满足 $r \leqslant n$，对其进行奇异值分解，即

$$G = U\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^T \tag{16}$$

其中 $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$，且 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r \geqslant 0$，$\sigma_1$，$\sigma_2$，…，$\sigma_r$ 称为矩阵 G 的奇异值。

令 $z = U^Tc$，$m = V^Tg$，把它们分块

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},\quad m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix},\quad z_1,\ m_1 \in R^r$$

于是

$$\| g - Gc \|_2 = \| V^T(g - GUU^Tc) \|_2 =$$

$$\left\| \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\|_2 = \| m_1 - \Sigma z_1 \|_2 + \| m_2 \|_2$$

显然，当 $z_1 = \Sigma^{-1}m_1$ 时，$\| g - Gc \|_2 = \min$，于是

$$z = \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} m_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \ \forall z_2 \in R_{n-r} \tag{17}$$

都是 $\| g - Gc \|_2 = \min$ 的解，但若取 $z_2 = 0$，即 $z = \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} m_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$，则

$$c = Uz = U\begin{pmatrix} \Sigma^{-1} m_1 \\ 0 \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

$$= U\begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T g \tag{18}$$

是极小最小二乘解。

矩阵 G 的加号广义逆定义为

$$G^+ = U\begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T \tag{19}$$

所以(18)式又可写为

$$c = G^+ g \tag{20}$$

上述过程指出如何用矩阵的奇异值分解来求解模式系数(即使当系数矩阵非列满秩)。由(16)，(19)和(20)式可以看出奇异值分解算法求解模式系数的过程就是利用奇异值分解来求系数矩阵广义逆的过程。

3 仿真结果

为考核上述算法的计算精度，采用 H-S 传感器对实际的人眼波前像差进行测量。根据所得 127 个质心点坐标和相应质心偏移量，采用 35 项 Zernike 多项式，利用上述 3 种算法分别进行人眼波前像差的重建，其中 Gram-Schmidt 正交变换法是被大家公认和实验证明了的精度较高的算法[14]。重建所得 Zernike 系数和精度如表 1 所示，其中 rms 值是人眼波前像差本身的均方差值。

Table 1 Mode coefficients and precision of wave front aberration reconstruction of human eye

	Gram-Schmidt 正交	Householder 变换	奇异值分解
1	0	0	0
2	0	0	0
3	− 0 379 486 425 326 098	− 0 379 486 425 326 099	− 0 379 486 425 326 098
4	− 0 669 201 035 766 956	− 0 669 201 035 766 957	− 0 669 201 035 766 957
5	0 032 807 071 232 782	0 032 807 071 232 783	0 032 807 071 232 782
6	− 0 033 606 531 286 083	− 0 033 606 531 286 081	− 0 033 606 531 286 082
7	− 0 053 323 741 002 287	− 0 053 323 741 002 286	− 0 053 323 741 002 285
8	− 0 097 790 000 704 398	− 0 097 790 000 704 397	− 0 097 790 000 704 399
9	0 001 669 230 592 516	0 001 669 230 592 515	0 001 669 230 592 516
⋮	⋮	⋮	⋮
30	− 0 016 416 568 351 820	− 0 016 416 568 351 810	− 0 016 416 568 351 820
31	0 005 977 243 371 055	0 005 977 243 371 056	0 005 977 243 371 055
32	− 0 013 762 195 725 072	− 0 013 762 195 725 072	− 0 013 762 195 725 073
33	− 0 001 022 494 728 884	− 0 001 022 494 728 885	− 0 001 022 494 728 884
34	0 018 849 845 734 457	0 018 849 845 734 458	0 018 849 845 734 458
35	− 0 000 210 664 153 048	− 0 000 210 664 153 048	− 0 000 210 664 153 049
rms	0 580 958 927 449 376	0 580 958 927 449 379	0 580 958 927 449 377

根据表 1 数据可以计算出其余 2 种算法与 Gram-Schmidt 正交化方法所求得的各项模式系数之间的相对误差，从而检验各算法的重建精度，相对误差根据以下公式计算

$$\frac{c_{1i} - c_{0i}}{c_{0i}} \times 100\% \tag{21}$$

其中 c_{0i} 为 Gram-Schmidt 正交化方法求得的第 i 项模式系数，c_{1i} 分别为其余 2 种算法重建出的第 i 项模式系数。

由表中数据计算得出，各项重建系数的相对误差数量级都在 10^{-14} 以内。此外，同时对多只模拟眼和人眼的实测数据进行波前重建，其各项重建系数与 Gram-Schmidt 正交化方法所求得的各项模式的相对误差均在数量级 10^{-12} 以内。

由上述结果可知，3 种算法重建精度相当，且都具有很高的精度。但在实际计算中发现，在相同 Zernike 多项式阶数的情况下，Gram-Schmidt 正交化方法虽没有出现系数矩阵严重病态的情况，但在构造正交归一函数系时却存在严重的相关，有时会得不到稳定的解；Householder 变换和奇异值分解算法都避免了法方程组的构造，因此都非常稳定，但是奇异值分解算法理论简单，计算步骤较少，易于编程。

4 小 结

人眼波前像差的重建是基于自适应光学技术获取高精度视网膜图像的重要环节。论文通过理论分析和数值仿真得出，基于奇异值分解的人眼波前像差重建算法性能更优，论文的研究为搭建基于自适应光学的人眼高精度视网膜成像系统提供了算法支持。

参 考 文 献

[1] Liang Junzhong, Williams David R, Miller Donald T. J. Opt. Soc. Am. A, 1997, 14(11): 2884.
[2] Le Gargasson Jean-Francois, Glank Marie, Lena Pierre. Comptes Rendus de I' Académie des Sciences-Series Ⅳ-Physics-Astrophysics, 2001, 2(8): 1131.
[3] QU Jun-le, Jonnal Ravi S, Thorn Karen, et al(屈军乐, Jonnal Ravi S, Thorn Karen, 等). Acta Biophysica Sinica(生物物理学报), 2004, 20(2): 104.
[4] Baik Sung-Hoon, Park Seung-Kyu, Kim Cheol-Jung, et al. Optics & Laser Technology, 2007, 39(2): 262.
[5] Rammage R R, Neal D R, Copland R J. Application of Shack-Hartmann Wavefront Sensing Technology to Transmissive Optic Metrology. Conference on Advanced Characterization Techniques for Optical, Semiconductor, and Data Storage Components, WA, USA, 9-11 July 2002, 27 March 2003. 161.
[6] Seifert L, Liesener J, Tiziani H J. Optics Communications, 2003, 216(4): 313.
[7] JIANG Wen-han, XIAN Hao, YANG Ze-ping, et al(姜文汉, 鲜 浩, 杨泽平, 等). Chinese Journal of Quantum Electornics(量子电子学报), 1998, 15(2): 228.
[8] Nam Jayoung, Rubinstein Jacob. J. Opt. Soc. Am. A, 2005, 22(9): 1709.
[9] Iskander D Robert, Collins Michael J, Davis Brett. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 2001, 48(1): 87.
[10] Genberg V L, Michels G J, Doyle K B. Orthogonality of Zernike Polynomials. in Optomechanical Design and Engineer 2002, Seattle, WA, USA, 7-9 July, 2002, 28 March 2003. 276.
[11] Tamgo William J. Appl. Phys. 1977, 13(4): 327.
[12] JIANG Yue-song, WANG Sen, ZHAO Da-zun, et al(江月松, 王 森, 赵达遵, 等). Optical Technology(光学技术), 2001, 27(3): 220.
[13] YAN Jing-zhou, SUN Hong-huan, GAO Zhi-qiang, et al(鄢静舟, 孙厚环, 高志强, 等). Acta Mathematica Scientia(数学物理学报), 2000, 20(3): 378.
[14] CHANG Li-ping, SHEN Wei-xing, LIN Zun-qi(常丽萍, 沈卫星, 林尊琪). Acta Optica Sinica(光学学报), 2006, 26(11): 1676.

Comparative Study on Algorithms for Wave-Front Aberration Reconstruction of Human Eye

GAO Wei-wei, SHEN Jian-xin, LI Bang-ming, LIANG Chun
College of Mechanical & Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China

Abstract Zernike mode reconstruction model of human eye wavefront aberrations based on Hartmann-Shack sensor is introduced. Three algorithms, including Gram-Schmidt orthogonal transformation, Householder transformation and singular value decomposition, are deduced and compared with each other. Through simulation by the experimental data, the results suggest that the accuracy of the three methods is equivalent and singular value decomposition is the relatively ideal algorithm of wavefront aberrations of human eyes.

Keywords Imaging optics; Wavefront aberration reconstruction of human eye; Gram-Schmidt orthogonal transformation; Householder transformation; Singular value decomposition

(Received Dec. 26, 2009; accepted Mar. 28, 2010)